

Exercice 1 : (3,5 points)

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I :

Pour tous x et y de l'intervalle $G =]1; 2[$ on pose : $x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$

0,50 pt 1- Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur G .

2. On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif. On considère l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ dans G

$$\text{définie par : } f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

0,75 pt a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$.

0,50 pt b) En déduire que $(G, *)$ est groupe commutatif et déterminer son élément neutre.

Partie II :

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nul $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

$$\text{On pose : } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

0,50 pt 1) a) Vérifier que : $A^3 = O$, puis en déduire que A est un diviseur de zéro dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,50 pt b) Vérifier que : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ puis en déduire que la matrice $A + I$ admet un inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ à déterminer.

0,75 pt 2) Pour tous a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a; b) = a.I + b.A$, et on considère l'ensemble

$$E = \{M(a; b) / (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Montrer que l'ensemble $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel et déterminer une base de $(E, +, \cdot)$.

Exercice 2 : (3 points)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

I. On tire successivement avec remise quatre boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre des boules noir tirées de l'urne.

1,00 pt 1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

0,50 pt 2) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

II. On effectue l'expérience de trois étapes suivantes :

Étape 1 : On tire une boule de l'urne, on note sa couleur puis on le remettra dans l'urne.

Étape 2 : On rajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à la première étape.

Étape 3 : On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne qui contient 12 boules après la deuxième étape.

On considère les événements suivants :
 N : " la boule tirée à la première étape est noir".
 R : " la boule tirée à la première étape est rouge".
 E : " les 3 boules tirées à la seconde étape sont noirs".

0,50 pt 1) Montrer que : $P(E \cap N) = \frac{12}{55}$

0,50 pt 2) Calculer $P(E)$.

0,50 pt 3) Calculer la probabilité de l'événement R sachant que l'événement E a été réalisé.

Exercice 3 : (3,5 points)

Partie I :

Soit a un nombre complexe différent de 1 .

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

0,50 pt 1) Montrer que : $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$ et $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$ sont les deux solutions de l'équation (E) .

2) On prend $a = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

0,50 pt a) Montrer que : $a-1 = 2\sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}$.

1,00 pt b) En déduire la forme trigonométrique des nombres z_1 et z_2 .

Partie II :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Supposons que $\operatorname{Re}(a) < 0$, on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$

0,50 pt 1) Déterminer les affixes des points J et K les milieux de $[AC]$ et $[AB]$ respectivement en fonction de a .

0,50 pt 2) Soient $r_1 = R\left(J, \frac{\pi}{2}\right)$ et $r_2 = R\left(K, \frac{\pi}{2}\right)$.

On pose $A' = r_2(A)$ et $C' = r_1(C)$; soient a' et c' les affixes respectifs des points A' et C' .

Montrer que $a' = z_1$ et $c' = z_2$.

0,50 pt 3) Calculer $\frac{a'-c'}{a-1}$ puis en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$.

Exercice 4 : (8,25 points)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(0) = 1$ et $(\forall x > 0)$;

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2(x)}}$$

0,50 pt 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

0,50 pt b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. (vous pouvez utiliser le résultat $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x)$)

0,50 pt c) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que : $(\forall x > 0)$; $f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

0,50 pt d) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2) Soit F la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

Et soit (C_F) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0,25 pt a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur l'intervalle $[e; +\infty[$.

0,50 pt b) Montrer que : $(\forall t \geq e) ; t \ln t \leq \sqrt{1+t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t$.

0,75 pt c) Montrer que : $(\forall x \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x)$.

0,50 pt d) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ et que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.

0,50 pt e) Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexions et déterminer leurs abscisses.

1,00 pt f) Tracer (C_F) . (On admet que $F\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,4$ et que $F(1) \approx 0,5$)

3) Pour tout $x \in [0; +\infty[$ on pose : $\varphi(x) = x - F(x)$

0,75 pt a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ puis étudier la monotonie de la fonction φ .

0,50 pt b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation $\varphi(x) = n$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

0,50 pt c) Montrer que : $(\forall n \geq 1) ; \alpha_n \geq n$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

0,50 pt 4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$. (Vous pouvez utiliser le TAF)

0,50 pt b) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

Exercice 5 : (1,75 points)

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

0,25 pt 1) Vérifier que : $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 (\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)))$.

0,50 pt 2) En utilisant le TAF montrer que : $(\forall n \geq 1) (\exists c \in]n; n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$

0,50 pt 3) Montrer que : $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2) \arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2) \arctan(n+1)}$

0,50 pt 4) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$