

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition :

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur \mathbb{R} par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a , b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :

■ $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$

■ $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5}$

■ $h(x) = 4 - 2x^2$

■ $k(x) = (x-4)(5-2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.

■ $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

■ $n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique :

$f(x) = \text{☺}(x - \text{☹})^2 + \text{☺}$ où ☺, ☹ et ☺ sont des nombres réels.

$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$

$= 2[x^2 - 10x] + 10$

$= 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10$

$= 2[(x-5)^2 - 25] + 10$

$= 2(x-5)^2 - 50 + 10$

$= 2(x-5)^2 - 40$

car $x^2 - 10x$ est le début du développement de $(x-5)^2$ et $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ est la forme canonique de f .

Propriété :

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres réels.}$$

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f .

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x \right] + c \\ &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a(x - \alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

$$\text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Remarque :

Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d'utiliser les deux dernières formules donnant α et β ... à condition de les connaître !

III. Variations et représentation graphique

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par :

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$$

Alors : $f(x) \geq 3$ car $2(x-1)^2$ est positif.

Or $f(1) = 3$ donc pour tout x , $f(x) \geq f(1)$.

f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β .

- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β .

Remarque :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x = -\frac{b}{2a}$.

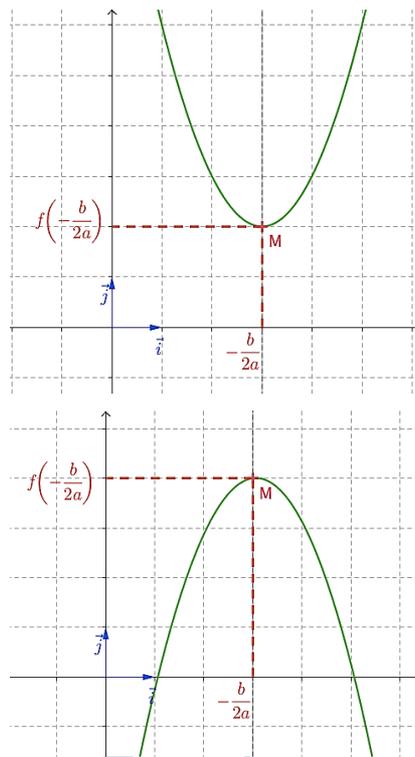
(voir résultat de la démonstration dans II.)

■ Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			

■ Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			



Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.

Le point M de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est le **sommet** de la parabole.

Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction f .

La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

Représenter graphiquement la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -x^2 + 4x$

Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :

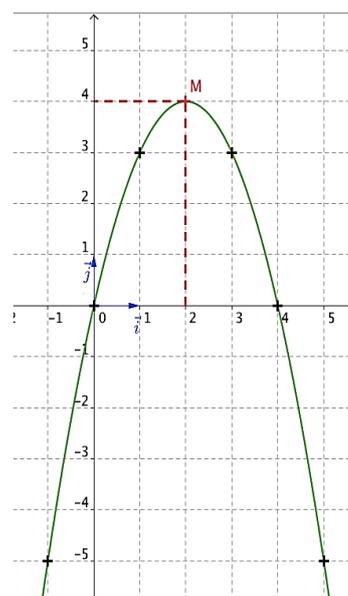
$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x^2 + 4x \\
 &= -(x^2 - 4x) \\
 &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) \\
 &= -((x-2)^2 - 4) \\
 &= -(x-2)^2 + 4
 \end{aligned}$$

f admet donc un maximum en 2 égal à

$$f(2) = -(2-2)^2 + 4 = 4$$

Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f			



On obtient la courbe représentative de f ci-contre.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'une parabole

Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

- La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$, soit $x = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$.

La droite d'équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

- Les coordonnées de son sommet sont : $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ soit :

$$(3; 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 1) = (3; -17)$$

Le point de coordonnées $(3; -17)$ est donc le sommet de la parabole.

$a = 2 > 0$, ce sommet correspond à un minimum.

