Examen Normalisé n° 35 **2éme Bac PC**

Exercice 1 : (3 point)

On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 21 \\ u_{n+1} = \frac{1}{20}u_n + \frac{19}{20} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

1. a) Vérifier que : $(\forall n \in IN)$; $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{20}(u_n - 1)$ **(0.25pt)**

b) Montrer par récurrence, que : $(\forall n \in IN)$; $u_n \geq 1$. **(0.5pt)**

2. a) Vérifier que: $(\forall n \in IN)$; $u_{n+1} - u_n = \frac{19}{20}(1 - u_n)$ **(0.25pt)**

b) Montrer que $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente.

3. On considère la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par : $v_n = \frac{20}{u_n - 1}$; pour tout $n \in IN$.

a) Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison 20 ; puis déterminer v_n en fonction de n. **(0.75pt)**

b) Montrer que : $u_n = 20\left(\frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20}\right)^n\right)$; pour tout $n \in IN$. **(0.5pt)**

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **(0.25pt)**

Exercice 2 : (5 point)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$. **(0.5pt)**

On considère dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A, B e C d'affixes respectives : $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $b = \sqrt{2} + 1 + i$ et $c = \bar{b}$.

2. Montrer que : $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ **(0.5pt)**

3. Soit R la rotation de centre 0 e d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que : $b = ac$; puis déduire que B l'image de C par la rotation R . **(0.5pt)**

b) Déduire que : $\arg(b) \equiv \frac{1}{2}\arg(a)[\pi]$ et montrer que $|b| = \sqrt{2\left(\sqrt{2}+2\right)}$. **(1pt)**

c) En déduire que : $b^4 = 4\left(\sqrt{2}+2\right)^2 i$. **(0.5pt)**

4. On considère le point D d'affixe $d = \sqrt{2}$.

a) Vérifier que : $b - d = i(c - d)$. **(0.5pt)**

b) Déduire que : $DB = DC$ puis déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)$. **(1pt)**

c) Déduire la nature du triangle BDC. **(0.5pt)**

Exercice 3 : (2 point)

On considère les deux intégrales suivantes : $I=\int_0^{\ln 2}\frac{3e^x+2}{e^x+1}\,dx$ et $J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}\,dx$

1. a) Vérifier que : $I-J=\int_0^{\ln 2}\left(1-e^x\right)\,dx$ **(0.25pt)**

   b) Déduire que: $I-J=\ln 2-1$ **(0.5pt)**

2. Vérifier que : $(\forall x\in IR)$; $\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}=e^x+1+\frac{e^x}{e^x+1}$. **(0.25pt)**

3. Montrer que : $J=1+\ln 3$; puis déduire la valeur de I. **(1pt)**

Problème : (10 point)

Partie I : fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x)=e^x-1+x$

1. Étudier le signe de e^x-1 sur IR. **(0.5pt)**
2. Montrer que : $(\forall x\in]-\infty;0])$; $g(x)\le 0$ et que : $(\forall x\in [0;+\infty[)$; $g(x)\ge 0$. **(1 pt)**

Partie II : Étude d'une fonction

On considère la fonction définie sur IR par : $f(x)=\frac{1-e^x+xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm)$

1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$; puis interpréter géométriquement le résultat. **(0.5pt)**

2. a) Vérifier que : $(\forall x\in IR)$; $f(x)=\frac{x+e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$ **(0.25pt)**

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **(0.5pt)**

3. Soit (Δ) la droite d'équation $y=x-1$.

   a) Vérifier que : $(\forall x\in IR)$; $f(x)-(x-1)=\frac{(2-x)e^{-x}}{e^{-x}+1}$ **(0.25pt)**

   b) Montrer que (Δ) est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$. **(0.5pt)**

   c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et la droite (Δ). **(0.25pt)**

   d) Montrer que (C_f) est au-dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;2]$. **(0.75pt)**

4. a) Montrer que : $(\forall x\in IR)$; $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ (1pt)

   b) Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$. **(1pt)**

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur IR . **(0.5pt)**

5. Soit (D) la droite d'équation $y=x$.

   a) Vérifier que : $(\forall x\in IR)$; $x-f(x)=\frac{g(x)}{e^x+1}$. **(0.25pt)**

   b) Etudier la position relative de (C_f) et de la droite (D). **(0,5pt)**

6. a) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$; montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. **(0.5pt)**

b) Montrer que : $\left(h^{-1}\right)'(1)=1+\frac{1}{e^2}$. **(0.75pt)**

7. Construire $\left(C_f\right)$; $\left(C_{h^{-1}}\right)$ et les deux droites (Δ) et (D) dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. **(1 pt)**