<u>Exercice 1:</u> (3,50 points)

Soit (u_n) *une suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 1}{9u_n + 1} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

0,50 1) *Montrer par récurrence que :* $3u_n - 1 > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

0,75 2) *Montrer que* (u_n) *est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.*

Soit (v_n) *une suite définie par :* $v_n = \dfrac{1}{3u_n - 1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

0,50 3) *Montrer que* (v_n) *est une suite arithmétique et déterminer sa raison.*

0,75 4) *Écrire* v_n *en fonction de n puis montrer que :* $u_{n+1} = \dfrac{2+n}{2+3n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

0,50 5) *Calculer la limite de da suite* (u_n)

0,50 6) *Calculer la limite de la suite* (w_n) *définie par :* $w_n = 2 + \ln(1 + 3u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

<u>Exercice 2</u>: (3 points)

Dans l'espace muni a un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(1;1;-1)$; $B(0;0;-1)$; $C(2;0;1)$ *et* (S) *une sphère d'équation cartésienne:* $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0$

0,50 1) *Montrer que* (S) *est la sphère de centre* $\Omega(1;1;0)$ *et de rayon* $\sqrt{2}$.

1,00 2) *Montrer que :* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ *puis en déduire que :* $x - y - 2 - 1 = 0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,75 3) *Calculer* $d(\Omega;(ABC))$ *puis en déduire que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle* (C) *de rayon* $r = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

0,25 4) a) *Déterminer la représentation paramétrique de la droite* (D) *passant par* Ω *et orthogonale au plan* (ABC).

0,50 b) *Déterminer le triplet de coordonnes du point H le centre de cercle* (C).

<u>Exercice 3:</u> (2.25 points)

Un sac contient trois boules rouges et quatre boules noires et deux boules vertes (les boules indiscernables au toucher)
On tire successivement sans remise trois boules du sac.
On considère les évènements :
A: "Les trois boules tirées sont noires"

B: "Obtenir au moins une boule vert parmi les trois boules tirées "

1) Calculer $p(A)$ et montrer que $P(B)=\frac{7}{12}$-

2) Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre des boules vertes restant dans le sac après le tirage.

a) Montrer que: $P(X=1)=\frac{1}{2}$.

b) Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 4: (3.75 points)

0,50 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ L'équation : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

Le plan complexe et rapporté à un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A; B et C d'affixes respectives: $a=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; $b=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ et $c=e^{i\frac{\pi}{6}}$

0,50 2) a) Ecrire le nombre complexe a sous la forme trigonométrique et c sous la forme algébrique

0,75 b) Montrer que : $2b^3=a$ et que : $b^2\overline{c}=1$

0,75 3) Soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

Vérifier que $z'=\overline{c}z$ et montrer que l'affixe du point A' l'image du point A par R est $a'=2b$

0,50 4) Soit d l'affixe du point D l'image du point C par la translation T de vecteur $-\vec{u}$ montrer que : $d=-1+b^2$

0,75 5) Montrer que : $\frac{d}{b}=b-\overline{b}$, puis déduire la nature du triangle OBD

Problème : (7,50 points)

Soit / une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}e^x\left(\frac{1}{2}e^x+e^x(x-2)\right)$; soit (C) la courbe représentative de dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité: 1cm)

0,25 1) a) Vérifier que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,50 b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de la direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0,75 2) Vérifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ puis interpréter le résultat géométriquement.

0,50 3) a) Montrer que : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)e^{2x}$ pour x tout de $\mathbb{R}$.

0,25 b) Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{3}{2}$

0,50 c) Déterminer le signe de la fonction $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

0,75 4) a) Montrer que : $f'(x)=e^{2x}(x-1)$ pour tout dans $\mathbb{R}$.

0,50 b) Dresser le tableau des variations de sur $\mathbb{R}$.

0,50 5) Montrer que $A\left(\frac{1}{2};-\frac{e}{2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

0,75 6) Soit h une fonction définie sur $I=[1;+\infty[$ par: $h(x)=f(x)$

Montrer que la fonction / admet une fonction réciproque définie sur / à définir.

1,25 7) Construire (C) et $(C_{h^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction /

0,50 8) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)e^{2x}dx=\frac{1}{4}e^{2}$

0,50 b) Calculer en cm² l'aire du domaine plan limité par (C) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{3}{2}$ et $x=2$