



guessmaths

Série n°14 d'exercices corrigés sur limites et continuité 2ème Bac PC

Exercice 1 :

Considérons la fonction f définie Par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases} \quad (\text{avec } m \text{ paramètre réel})$$

Déterminer la valeur du réel m pour laquelle f est continue en $x_0 = 1$

Solution :

Pour $x \neq 1$; on a : $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$; on pose $h(x) = \sin(\pi x)$ donc $h(1) = 0$

Alors $f(x) = \frac{h(\pi x) - h(1)}{x-1}$ et h est dérivable en $x_0 = 1$; $h'(x) = \pi \cos(\pi x)$

Donc $h'(1) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

$$\begin{aligned} D'où \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(\pi x) - h(1)}{x-1} \\ &= h'(1) = -\pi \end{aligned}$$

f est continue en $x_0 = 1$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -\pi$; donc $m = -\pi$

Exercice 2 :

Considérons la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\text{si } x \neq 0 ; \text{ on a : } f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(x) - 2 = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow |f(x) - 2| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$$

Et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - 2| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

Et $f(0) = 2$; d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(2)$

Donc : est continue en $x_0 = 0$

Exercice 3 :

Considérons la fonction f définie Par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Solution :

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \neq 2 \text{ on a : } f(x) &= \frac{x^2+x-6}{x-2} \\ &= \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} \\ &= x+3 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+3) = 5 \text{ et } f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{7 - 3 \times 2} = 5$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

Par suite f est continue adroite en $x_0 = 2$ et comme la fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{7-3x}$ est continue à gauche en $x_0 = 2$

Donc f est continue en $x_0 = 2$

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

Solution :

► Pour $x > 1$; on a : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= x+1$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$

Et $f(1) = 2$; donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(2)$

Par suite f est continue à droite en $x_0 = 1$

► Pour $x < 1$; on a : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}$$

$$= -(x+1)$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = -2$

Et $f(1) = 2$; donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(2)$

Par suite f n'est pas continue à gauche en $x_0 = 1$

Donc f n'est pas continue en $x_0 = 1$

On dit que f est discontinue en $x_0 = 1$

Exercice 5 :

1) Soit f une fonction définie par : $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction définie par : $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^+$

Solution :

1) La fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction trigonométrique usuelle)

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$

2) $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } 1 + \sin^2 x \neq 0\}$

Donc $D_g = \mathbb{R}^+$

La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (fonction polynôme) et $x \mapsto 1 + \sin^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 1 + \sin^2 x \neq 0$

Donc la fonction $x \mapsto \frac{x}{1 + \sin^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$

D'autre part la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Donc g est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 5 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \times \pi \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right)$

Solution :

1) On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \times \pi \right) = \frac{\pi}{2}$ et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est continue en $\frac{\pi}{2}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \times \pi \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$

2) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) = \pi$ et la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue en π .

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) = \cos(\pi) = -1$