

Exercice n °5 sur les suites

Exercice 5 : (avec solution)

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = -\sqrt{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - \sqrt{2} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1- Calculer U_1 et U_2 .

2- On considère (V_n) la suite numérique définie par : $V_n = U_n + \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Calculer V_1 et V_2 .

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

3- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n - 3 \right]$.

4- a) Ecrire en fonction de n la somme $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Correction Exercice 5 :

$$1- \bullet U_1 = \frac{1}{3}U_0 - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\boxed{U_1 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}}$$

$$\bullet U_2 = \frac{1}{3}U_1 - \sqrt{2} = -\frac{1}{3} \times \frac{4\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} = -\frac{13\sqrt{2}}{9}$$

$$\boxed{U_2 = -\frac{13\sqrt{2}}{9}}$$

$$1- V_n = U_n + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$a) \bullet V_0 = U_0 + \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\bullet V_1 = U_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{8\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\boxed{V_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}}$$

b) Montrons que la suite (V_n) est géométrique.

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_{n+1} &= \frac{1}{3}U_n - \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{1}{3}U_n + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{1}{3}\left(U_n + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{3}V_n
 \end{aligned}$$

$$D'où : (\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, et de premier terme $V_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left(V_0 = U_0 + \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$2- \text{ Montrons que : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \right]$$

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, et de premier terme $V_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc :

$$\begin{aligned}
 (\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n &= V_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
 \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad V_n = U_n + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\
 \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\
 \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \right]
 \end{aligned}$$

$$3- a) \text{ Soit la somme : } S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

On a :

$$\begin{aligned}
 (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n &= V_n - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\
 S_n &= U_1 + U_2 + \dots + U_n \\
 \Rightarrow S_n &= V_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + V_2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \dots + V_n - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\
 \Rightarrow S_n &= (V_1 + V_2 + \dots + V_n) - n \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \\
 \Rightarrow S_n &= V_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} - n \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\sqrt{2}}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} - \frac{3n\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) - \frac{3n\sqrt{2}}{2}$$

$$D'où : \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) - \frac{3n\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3n\sqrt{2}}{2}\right) = -\infty$$

$$\text{Donc : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty}$$