Série n° 9 d'exercices corrigés
« Fonction Logarithmique »

Exercice1 *(8,5points)*

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;e]$ *par :* $\begin{cases} f(x)=x^2\sqrt{1-\ln x} & si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On désigne par (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Monter que f est continue à droite en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Vérifier que pour tout réel $]0;e[$ *on a :* $\dfrac{f(x)}{x-e}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-\ln x}}\times\dfrac{\ln\left(\dfrac{e}{x}\right)}{\dfrac{e}{x}-1}$

b) Etudier alors la dérivabilité de f à gauche en e.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a) Montrer que f est dérivable sur $]0;e[$ *et* $(\forall x\in]0;e[)$ *;* $f'(x)=\dfrac{x(3-4\ln x)}{2\sqrt{1-\ln x}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (C_f)

5) Soit a un réel de l'intervalle $]0;e[$.

On se propose de déterminer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C_f) *autour de l'axe des abscisses,*

a) Montrer que si g est une fonction continue sur $[0;e]$ *alors :* $\lim_{x\to 0^+}\int_a^e g(x)dx=\int_0^e g(x)dx$.

b) A l'aide d'une intégration par partie, calculer en fonction de a, l'intégrale $I=\int_a^e x^4\ln x\,dx$ *et vérifier que :* $\lim_{x\to 0^+} I=\dfrac{4}{25}e$.

c) Déterminer alors le volume V.

Correction Exercice 1

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2\sqrt{1-\ln x}$

$=\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}\sqrt{1-\ln x}$

$=\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x-x\ln x}=0$ (Car $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}}=0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$)

Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$; alors f est *continue à droite en 0.*

2) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sqrt{1-\ln x}}{x}$

$=\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{1-\ln x}$

$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sqrt{x-x\ln x}=0$ (Car $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$)

Donc f est dérivable à droite en 0 et sa courbe $\left(C_f\right)$ *admet, au point d'abscisse 0, une demi-tangente horizontale (c-à-d de coefficient directeur* $f_g'(0)=0$*)*

3) a) Pour tout réel $x \in]0;e[$ *; on a ;* $\dfrac{f(x)}{x-e}=\dfrac{x^2\sqrt{1-\ln x}}{x-e}$

Et $$\frac{-x}{\sqrt{1-\ln x}}\times\frac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x}-1}=\frac{-x\sqrt{1-\ln x}}{\cancel{1-\ln x}}\times\frac{\cancel{1-\ln x}}{\frac{e-x}{x}}$$
$$=\frac{-x^2\sqrt{1-\ln x}}{e-x}$$
$$=\frac{x^2\sqrt{1-\ln x}}{x-e}$$
$$=\frac{f(x)}{x-e}$$

b) On a : $0<x<e \Leftrightarrow \frac{e}{x}<1$ *; donc* $x\to e^- \Rightarrow \frac{e}{x}\to 1^-$ *; d'où :*

$$\lim_{x\to e^-}\frac{f(x)}{x-e}=\lim_{x\to e^-}\frac{-x}{\sqrt{1-\ln x}}\times\frac{\ln\left(\frac{e}{x}\right)}{\frac{e}{x}-1}=-\infty$$

(Car $\lim_{t\to 1^-}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$; $\lim_{x\to e^-}\dfrac{-x}{\sqrt{1-\ln x}}=\lim_{x\to e^-}-\sqrt{\dfrac{x^2}{1-\ln x}}=-\infty$; $\lim_{x\to e^-}1-\ln x=0^+$ et

$$\lim_{x\to e^-}\frac{-x}{\sqrt{1-\ln x}}=\lim_{x\to e^-}-\sqrt{\frac{x^2}{1-\ln x}}=-\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en e et sa courbe $\left(C_f\right)$ *admet, au point d'abscisse e ,une demi-tangente verticale.*

4) a) La fonction $x\mapsto 1-\ln x$ *est dérivable et strictement positive sur l'intervalle* $]0;e[$ *;alors La fonction* $x\mapsto\sqrt{1-\ln x}$ *est dérivable et strictement positive sur l'intervalle* $]0;e[$

Donc f est dérivable sur $]0;e[$ *comme produit de fonctions dérivables et pour tout* $x\in]0;e[$ *on a :*

$$f'(x)=\left(x^2\sqrt{1-\ln x}\right)'$$
$$=2x\sqrt{1-\ln x}+x^2\frac{-(\ln x)'}{2\sqrt{1-\ln x}}$$
$$=2x\sqrt{1-\ln x}+x^2\times\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-\ln x}}$$
$$=2x\sqrt{1-\ln x}-\frac{x}{2\sqrt{1-\ln x}}$$
$$=\frac{4x(1-\ln x)-x}{2\sqrt{1-\ln x}}$$
$$=\frac{4x-4x\ln x-x}{2\sqrt{1-\ln x}}$$

$$= \frac{3x - 4x\ln x}{2\sqrt{1-\ln x}}$$

$$= \frac{x(3-4\ln x)}{2\sqrt{1-\ln x}}$$

Donc pour tout $x \in]0;e[$; $f'(x) = \dfrac{x(3-4\ln x)}{2\sqrt{1-\ln x}}$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(3-4\ln x) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{4}}$$

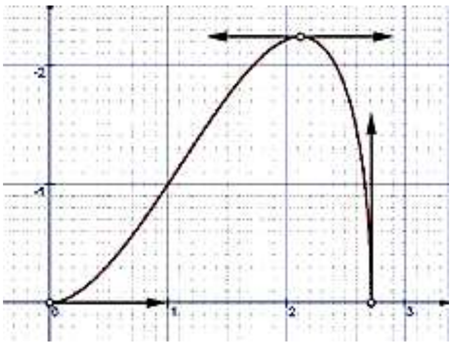
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(3-4\ln x) > 0$

$$\Leftrightarrow \ln x < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{3}{4}}$$

D'où le tableau de variation de f

x	0		$e^{\frac{3}{4}}$		e
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

c) Construction de (C_f)



5) a) g est continue sur $[0;e]$ *donc g admet des primitives sur cet intervalle*

Soit G une primitive de g sur l'intervalle $[0;e]$.

G est dérivable donc continue sur $[0;e]$ *et par suite continue à droite en 0.*

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = G(0)$ *D'où*

$$\lim_{x\to 0^+} \int_a^e g(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left(\left[G(x)\right]_a^e\right)$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(G(e) - G(a)\right)$$

$$= \left(G(e) - \lim_{a\to 0^+} G(a)\right)$$

$$= G(e) - G(0)$$

$$= \left[G(x)\right]_0^e$$

$$= \int_0^e g(x)\,dx$$

b) Posons ; $\begin{cases} u(x)=\ln x \Rightarrow u(x)=\dfrac{1}{x} \\ v'(x)=x^4 \Rightarrow v(x)=\dfrac{x^5}{5} \end{cases}$.

$$Donc \quad I=\int_a^e x^4 \ln x\, dx=\left[\frac{1}{5}x^5 \ln x\right]_a^e-\frac{1}{5}\int_a^e x^5\times\frac{1}{x}\, dx$$

$$=\frac{e^5}{5}-\frac{a^5\ln a}{5}-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_a^e$$

$$=\frac{e^5}{5}-\frac{a^5\ln a}{5}-\frac{e^5}{25}+\frac{a^5}{25}$$

$$=\frac{4e^5}{25}-\frac{a^5\ln a}{5}+\frac{a^5}{25}$$

Donc : $I=\dfrac{4e^5}{25}-\dfrac{a^5\ln a}{5}+\dfrac{a^5}{25}$

On a : $\lim\limits_{a\to 0^+} a^5\ln a=0$ *et* $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{a^5}{25}=0$; d'où : $\lim\limits_{a\to 0^+} I=\dfrac{4e^5}{25}$

c) $$V=\int_0^e \pi\left(f(x)\right)^2 dx$$

$$=\pi\int_0^e \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$=\pi\lim_{a\to 0^+}\int_a^e x^4(1-\ln x)dx$$

$$=\pi\left(\lim_{a\to 0^+}\int_a^e x^4 dx-\lim_{a\to 0^+}\int_a^e x^4\ln x\, dx\right)$$

$$=\pi\left(\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{x^5}{5}\right]_a^e-\lim_{a\to 0^+} I\right)$$

$$=\pi\left(\lim_{a\to 0^+}\left(\frac{e^5}{5}-\frac{a^5}{5}\right)-\frac{4e^5}{25}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{e^5}{5}-\frac{4e^5}{25}\right)$$

$$=\frac{\pi e^5}{25}$$