EXERCICE N° 1

1ère partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = e^{x} - 2x + 2$

1- Calculer $g'(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

2- a) Etudier le signe de $g'(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et en déduire les variations de la fonction g (le calcul des limites n'est pas demandé).*

b - En déduire que $g(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

2ème partie :

Soit la fonction définie par : $f(x) = xe^{-x} + \dfrac{x}{2} + 1$

Et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *; puis interpréter le résultat graphiquement.*

b - Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1 \right) \right]$*; puis interpréter le résultat graphiquement.*

c - Etudier les positions relatives de la courbe (C) *et la droite* (Δ) *d'équation :* $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

2- a- Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2e^{x}}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

b- Dresser le tableau de variations de f.

3- a - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet une solution unique* α *dans* $]-1;0[$

b - Déterminer l'équation de la tangente (T) *à la courbe* (C) *au point d'abscisse* 0.

4- Calculer $f''(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, puis déterminer le point d'inflexion de la courbe* (C)

5- Tracer (C) *;* (T) *et* (Δ) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$*. On prends* $e \simeq 2{,}7$ *et* $\dfrac{2}{e^{2}} \simeq 0{,}27$*).*

EXERCICE N° 2

1ère partie :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=1-\frac{x}{2}-\frac{2}{e^x+1}$

Et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- a) Vérifier que : $1-\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{e^{-x}+1}$

b) Etudier la parité de f.

2- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)\right]$*; puis interpréter le résultat*

3- a) Calculer $f'(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, puis étudier les variations de f sur* $\mathbb{R}^+$

b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})$ *;* $1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{x}{2}$

4- Tracer (C) *dans le repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$*.*

2émé partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1} \quad ;(\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $u_n>0$

2- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $u_{n+1}\leq\frac{u_n}{2}$ *; puis en déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

3- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente puis calculer sa limite*

EXERCICE N° 3

1ère partie :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $h(x)=xe^x+1$

1- a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} h(x)$*.*

b) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction h.

2- En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2ème partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - e^{x} + 2$

1- a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes α et β dans $\mathbb{R}$ tel que $\alpha > \beta$, puis montrer que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3ème partie :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{xe^{x} + 1}$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2- a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,.

b) Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

3- a) Montrer que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$

b) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}

4- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5- a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) - x = \dfrac{(x+1)u(x)}{xe^{x} + 1}$; tel que: $u(x) = e^{x} - xe^{x} - 1$

b) Etudier les variations de u sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire le signe de u sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire les positions relatives de la courbe (C) et la droite (T).

6- Tracer (C) et la droite (T) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On prends $-1{,}85<\beta<-1{,}84$; $-1{,}19<f(\beta)<-1{,}18$ et $\dfrac{2}{e^2}\simeq 0{,}27$).

EXERCICE N° 9

1ère partie :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=xe^x+e^x-1$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2- Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction h.

3- Calculer $h(0)$, puis déduire le signe de la fonction h.

2ème partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=xe^x-x+1$

1- a) Montrer que : $g'(x)=h(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2- Etudier les variations de la fonction g.

3- Calculer $g(0)$, puis déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)>0$.

4- a) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)-e^x=(x-1)(e^x-1)$

b) Déduire que : $(\forall x\in[0;1])$; $g(x)\le e^x$.

3ème partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln(xe^x-x+1)$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- a) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$; puis dresser le tableau de variation de f.

2- a) Vérifier que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*}\right)$; $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln\left(xe^{x}-x+1\right)}{xe^{x}-x+1}\left(e^{x}-1+\dfrac{1}{x}\right)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3- a) Vérifier que : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $f(x)=x+\ln x+\ln\left(1-\dfrac{1}{e^{x}}+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)$

b) Etudier la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

4- Calculer $f(1)$; puis tracer (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4ème partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_0=\ln 2\\ u_{n+1}=f(u_n)\ ;(\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

1- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\le u_n\le 1$

2- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite