

Sujet de révision n°8

Exercice 1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; On considère les points

$A(3 ; -2 ; 2)$ et $B(-1 ; 6 ; 4)$ et $C(5 ; 4 ; 4)$; et la sphère (S) dont $[AB]$ est un diamètre .

1- a) Montrer que le centre de la sphère est $\Omega(1 ; 2 ; 3)$ et son rayon est $R = \sqrt{21}$.

b) Donner une équation cartésienne de la sphère (S) .

2- a) Vérifier que $C \in (S)$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) tangent à (S) au point C .

3- Soit la droite (Δ) de représentation paramétrique :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a) Montrer que la distance de Ω à la droite (Δ) est égale à $\sqrt{11}$.

b) Déterminer l'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S) .

Exercice 2 :

Une urne contient 7 boules (2 Vertes , 3 Rouges et 2 blanches) indiscernables au toucher.

On tire au hasard simultanément deux boules de l'urne .

1- On considère les deux événements suivants :

A « Les deux boules tirées sont de la même couleur ».

B « Parmi les deux boules tirées il y'a au moins une boule Rouge ».

a) Montrer que la probabilité de l'événement A est $p(A) = \frac{5}{21}$

b) Calculer la probabilité de l'événement B .

c) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$

d) Est-ce que les deux événements A et B sont indépendantes ? justifier votre réponse .

2- Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules Rouges tirées .

a) Copier et compléter le tableau ci-dessous

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$			

b) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X .

Exercice 3 :

1- Déterminer les réels a et b tel que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right] \right) \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$.

2- Dédurre la valeur de l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$.

Exercice 4:

Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et Ω d'affixes respectifs $a = -2i$, $b = 2 + 2i$ et $\omega = 3 - i$.

1- Ecrire les complexes a et b sous forme trigonométrique.

2- On considère la rotation R de centre Ω est d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Et soit z' l'affixe du point

M' image du point M d'affixe z .

a) Montrer que : $z' = -iz + 4 + 2i$

b) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R ; puis déduire la nature du triangle ΩAB .

Problème :

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(1+x)$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

2- Etudier les branches infinies de (C_f) .

3- a) Montrer que : $(\forall x \in] -1; +\infty[) \quad f'(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(1+x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4- Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $(e-1)$.

5- Etudier la dérivabilité de f à droite de (-1) ; Donner une interprétation géométrique au résultat.

6- Construire la courbe (C_f) et la tangente (T) dans le même repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

$\left(\text{On prend } \ln 2 \approx 0,7 ; \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6 \text{ et } \frac{1}{e} \approx 0,4 \right)$.

Partie 2

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n \ln(1 + U_n)$.

1- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq -1 + e$.

2- Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3- Déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.