Exercice 1: (4 Pts)

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a)- calculer u_1.

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n > 2$.

2)- a)- Vérifier que: $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 1}$.

b)- En déduire la monotonie de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *puis justifier qu'elle est convergente.*

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : a_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

a) Montrer que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique de raison* $r = \dfrac{1}{3}$.

b) Exprimer a_n *en fonction de n, puis en déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{4n+12}{2n+3}$.

c) – Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *en justifiant la réponse.*

4)- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}\ ; S_n = a_0u_0 + a_1u_1 + \ldots + a_nu_n$.

Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, S_n = \dfrac{n^2 + 7n + 6}{3}$, *puis calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(S_n)}{\ln n}$.

Exercice 2: (5 Pts)

I- *On considère dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *'équation:* $(E): z^2 - 2\left(1-\sqrt{2}\right)z + 2\left(2-\sqrt{2}\right) = 0$

1) a) Montrer que le discriminant de (E) *est :* $\Delta = -4$.

b) En déduire les solutions z_1 *et* z_2 *de* (E) *tels que:* $Im(z_1) < 0$.

2)- a) Calculer $|z_1|$, *puis montrer que :* $(1+i)\cdot z_1 = -2.\overline{z}_1$.

b) Déduire z_1 *sous forme trigonométrique, puis calculer* $\cos\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)$.

II- *On considère les points E, F et G d'affixes respectifs :* $z_E = 1+i\,;\, z_F = 1-i$ *et* $z_G = -i3$.

1) Soit N l'image de F par l'homothétie h de centre G et de rapport 2.

Montrer que l'affixe de N est : $z_N = 2 + i(3-2)$.

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On pose : $A = r(G)$ *et* $C = r(N)$.

Montrer que : $z_A = 3$ *et* $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{w}(2i)$.

On pose : $B=t(N)$ et $D=t(G)$.

Montrer que : $z_B=2+i\sqrt{3}$ et $z_D=\left(2-\sqrt{3}\right)i$.

4) a) Montrer que E est milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.

Que peut-on déduire?

b) Vérifier que : $\dfrac{z_C-z_E}{z_B-z_E}=i$, puis en déduire la nature du triangle BCE.

c) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?Justifier la réponse.

Exercice 3: (11 Pts)

I- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$

1) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $g'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

b) En déduire la monotonie de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) Calculer $g(1)$, puis justifier que : $\forall x\in]0;1]$; $g(x)\leq 0$ et que $\forall x\in[1;+\infty[$; $g(x)\geq 0$

II- On considère [a fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par: $\forall x\in]\ 0;+\infty[$

; $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2-2$

1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$, puis en déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x$, puis en déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation: $y=x$.

2) a) Vérifier que : $(\forall x\in]\ 0;+\infty[)$; $f(x)=\dfrac{x^2+1-4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2-2}{x}$.

b) En déduire que: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ et donner une interprétation géométrique à ce résultat.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in]\ 0;+\infty[)$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation complet de f en justifiant la réponse.

4) a)Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) Montrer géométriquement que l'équation $(E):\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2-2=0$ admet une unique solution a dans $]\ 0;+\infty[$.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $[0;+\infty[$.

b) Construire la courbe $\left(C_{h^{-1}}\right)$ *dans le repère* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

6) *a) Montrer que la fonction* $K : x \mapsto x\ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $k : x \mapsto \ln x$ *sur* $]0;+\infty[$

b) En déduire que : $\int_1^e \ln(x)\,dx = 1$.

c) En utilisant une intégration par parties, calculer la surface délimitée par la courbe $\left(C_f\right)$*,la droite* (Δ) *et les droites d'équations:* $x = 1$ *et* $x = e$.