



Exercice n °7 sur les suites

Exercice 7: (avec solution)

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 1$

2- Soit (V_n) la suite numérique définie par :

$$V_n = U_n - 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique, puis écrire V_n en fonction de n .

b) On pose : $W_n = \ln(V_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Montrer que (W_n) est une suite arithmétique.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \frac{W_n}{V_n} \right)$

Correction Exercice 7

1- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 1$

■ Pour $n=0$ on a : $U_0 = 2 > 1$

■ Soit $(n \in \mathbb{N})$ supposons que : $U_n > 1$ et montrons que : $U_{n+1} > 1$

$$\text{On a : } U_n > 1 \Rightarrow 2U_n > 2 \Rightarrow 2U_n - 1 > 1 \Rightarrow U_{n+1} > 1$$

Donc on a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 1$

2- On a : $V_n = U_n - 1$

a) Soit $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = 2U_n - 1 - 1 = 2(U_n - 1)$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_{n+1} = 2V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q=2$ est de premier terme $V_0 = 1$.

b) On a : $W_n = \ln V_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

$$\text{Soit } W_{n+1} = \ln V_{n+1} = \ln 2V_n = \ln V_n + \ln 2$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_{n+1} = W_n + \ln 2$$

D'où (W_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ln 2$ est de premier terme $W_0 = 0$.

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \frac{W_n}{V_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \frac{n \ln 2}{2^n} \right) \quad \left(\text{Car } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_n = n \ln 2 \quad V_n = 2^n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \frac{W_n}{V_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 \ln 2}{e^{n \ln 2}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} \times \frac{(n \ln 2)^2}{e^{n \ln 2}} \right) = 0$$

$$\left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \right)$$