

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur Intervalle $[-1; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} & ; \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2\text{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) & ; \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

A] 1. Montrer que f est continue en 0.

2. Étudier la dérivabilité de f en 0 ; puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de (C_f) .

4. Vérifier que : $(\forall x > 0); f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \left(\frac{1-x}{(1+x)^2 + 4x} \right)$

5. Montrer que : $(\forall x \in [1; 2]); |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

6. Soit h la restriction de f sur $]-\infty; 0]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ vers un intervalle J à déterminer.

b) Soit h^{-1} la fonction réciproque de h ; montrer que h^{-1} est dérivable en $\sqrt[3]{2}$; puis calculer $(h^{-1})'(\sqrt[3]{2})$.

7) Représenter (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

B] Soit g la restriction de f sur $[0; +\infty[$.

On pose (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer que : $g([1; 2]) \subset [1; 2]$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 2$

2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; 2]$.

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

4. Dédire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = a \in]1; +\infty[\\ u_{n+1} = \frac{1}{5} \left(4u_n + \frac{a}{u_n^4} \right) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) .$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq \sqrt[5]{a}$. (on peut considérer la fonction $f : x \mapsto \frac{4x^5 + a}{5x^4}$)

2. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{a}{u_n^4}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n \leq \sqrt[5]{a}$.

b) Etudier la monotonie de chacune des suites (u_n) et (v_n) .

3. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{4}{5}(u_n - v_n)$.

b) Dédurre que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n - v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (a - a^3)$.

4. Dédurre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite.