Exercice 01:(04pts)

⇨ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1} = \frac{4u_n}{3+u_n}.$$

0,5 — 1)- a)- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n > 1$.

0,75 — b)- Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante , puis en déduire qu'elle est convergente

2)- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose : $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

0,75 — a)- Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{4}{3}$, puis exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,75 — b)- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = \dfrac{3}{3-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $w_n = \dfrac{v_n}{n^2}$.

1,25 — ✔ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);w_n = 3.e^{n\ln\left(\frac{4}{3}\right)-2\ln n}$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 02:(05pts)

0,75 — 1)- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2 - 4\sqrt{3}.z + 16 = 0$.

2)- Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, On considère Les points A et B d'affixes respectifs : $a = 2\sqrt{3} - 2i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.

1 — a)- Ecrire a et b sous forme trigonométrique .

0,75 — b)- Montrer que : $OA = OB$ et $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, puis en déduire la nature Du triangle OAB .

3)- Soient I le milieu du segment $[AB]$ et C l'image de I par l'homothétie h de centre O et de rapport $k = 2$.

1,25 — a)- Montrer que : $z_I = 2\sqrt{3}$ et que : $z_C = 4\sqrt{3}$.

1,25 — b)- Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange , puis en déduire que :

$$\overline{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AO})} \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] .$$

Exercice 03:(02pts)

0,5	1)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t^2-3t+2=0$.
	2)- En déduire dans l'intervalle $]0;+\infty[$:
0,75	a)- Les solutions de l'équation : $(E):(\ln x)^2-3\ln x+2=0$.
0,75	b)- l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(I):(\ln x)^2-3\ln x+2<0$.

Exercice 04:(09pts)

	I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-x.e^{-x+1}$.
0,5	1)- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});g'(x)=(x-1)e^{-x+1}$.
0,5	2)- Dresser le tableau de variation de g (Sans préciser les limites en $+\infty$ et $-\infty$).
0,5	3)- En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R});g(x)\geq 0$.
	II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)\left(1+e^{-x+1}\right)$.
0,25	1)- a)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
0,5	b)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0$,interpréter ce résultat géométriquement.
0,75	2)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, puis en déduire la nature de La branche infini de (C_f) au voisinage de $-\infty$.
0,75	3)- a)- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=g(x)$.
0,75	b)- Dresser le tableau de variation complet de f .
0,75	4)- Etudier la concavité de (C_f) et déterminer son point d'inflexion .
0,5	5)- a)- Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses .
1	b)- Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,75	6)- En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_{-1}^{1} f(x)dx=e^2-3$.
0,75	7)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
0,75	b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et que : $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{1+e^2}$.

Fin Du Sujet .