Série n°5 d'exercices « Etude de fonction logarithmique » ***2éme Bac SM***

EXERCICE 1

Soit $n \in IN^*$ *et* f_n *la fonction définie sue* IR^+ *Par :* $\begin{cases} f_n(x) = x(\text{Log}x)^n & si\ x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On pose ξ_n *sa courbe dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *unité graphique 2 cm.*

Partie A

1/ a) Montrer que f_n *est continue à droite en 0.*

b) Etudier la dérivabilité de f_n *à droite en 0.*

c) Montrer que f_n *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et calculer* $f_n'(x)$ *.*

2/ a) Dresser le tableau de variation de f_n *suivant la parité de n.*

(on distinguera les cas où $n = 1$ *et* $n \geq 3$ *)*

b) Montrer que toutes les courbes ξ_n *passent par trois points fixes : l'origine du repère et deux autres points A et B tels que* x_A *et* x_B *vérifiant :* $0 < x_A < x_B$

3/ a) Etudier la position relative de ξ_1 *et* ξ_2 *puis construire* ξ_1 *et* ξ_2 *dans le même repère.*

b) Calculer en cm², l'aire de la partie du plan limitée par ξ_1 *et* ξ_2 *et les droites d'équations :* $x = 1$ *et* $x = e$.

Partie B

On pose $F_n(\alpha) = \int_\alpha^1 f_n(x)dx$ *, avec* $n > 0$ *et* $\alpha \in]0;1[$.

1/ a) Sans calculer $F_n(\alpha)$ *, prouver que* $F_n(\alpha)$ *admet une limite finie notée* u_n *lors que α tend vers* 0^+ .

b) Calculer $F_1(\alpha)$ *,En déduire que* $u_1 = -\frac{1}{4}$.

2/ a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $\alpha \in]0;1[$ *et pour tout* $n > 0$ *on a :*

$$F_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\text{Log}\alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2}F_n(\alpha)) .$$

EXERCICE 2

Pour tout $n \in IN$ *, on pose :* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1- Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ *. En déduire* $\lim_{n\to+\infty} I_n$

2- Montrer pour tout $n \in IN$ *,* $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

3- Calculer I_0 *puis déduire* I_1 .

4- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$*:* $(-1)^n I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

5- En déduire la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_{n\geq1}$.

EXERCICE 3

PARTIE A

Soit la fonction f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ *par :* $f(x)=\dfrac{1}{x\left[1+(\ln x)^2\right]}$

On désigne par (C) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a. Montrer que f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ *et que pour tout* $x>0$ *on a :* $f'(x)=\left(\dfrac{1+\ln x}{x\left[1+(\ln x)^2\right]}\right)^2$

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ *et dresser le tableau de variation de f*

c. Donner une équation cartésienne de la tangente D à la courbe (C) *au point d'abscisse 1.*

d. Tracer (C) *et D dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité graphique 2 cm)*

2) a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur* $\left]0;+\infty\right[$

(On ne demande pas de calculer $f^{-1}(x)$ *)-*

b. Etudier la dérivabilité de f^{-1} *au point* $\dfrac{e}{2}$.

PARTIE B

On considère la fonction F définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ *, par :* $F(x)=\int_1^{e^{\tan x}} f(t)\,dt$.

1) a. Justifier l'existence de F

b. Montrer que F est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ *, et définir sa fonction dérivée.*

c. En déduire que pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ *; on a :* $F(x)=x$.

2) a. Montrer que : $\int_1^e f(t)\,dt=\dfrac{\pi}{4}$

b. Calculer, en cm^2 *, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations* $x=\dfrac{1}{e}$, $x=e$ *et* $y=0$.

Considérons la suite réelle (u_n) *définie sur IN par :* $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$

Soit x un réel strictement positif donné ; on pose, pour tout entier naturel non nul n ;

$S_n(x)=\dfrac{1}{x}\left(1-(\ln x)^2+(\ln x)^4+\ldots+(-1)^n(\ln x)^{2n}\right)$.

1) Montrer que pour tout n ; $S_n(x)=f(x)+(-1)^n\dfrac{(\ln x)^{2n+2}}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}$

2) a. Soit k un entier naturel non nul ; Calculer $\int_1^e \dfrac{1}{x}(\ln x)^{2k}\,dx$.

b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a : $u_n=\dfrac{\pi}{4}+R_n(x)$ *où*

$R_n(x)=(-1)^n\int_1^e \dfrac{(\ln x)^{2n+2}}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}dx$.

c. Montrer que pour tout entier naturel non nul n on : $\left|R_n(x)\right| \leq \frac{1}{2n+3}$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x^2+4)$

PARTIE A

1. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$.

   a) Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   b) Montrer que sur l'intervalle $[2;3]$ 1'equation $g(x)=0$ admet une unique solution qu'on notera α .

   Donner la valeur arrondie de à 10^{-1}.

   c) Justifier que le nombre réel α est unique solution de l'équation $f(x)=x$.

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_o=1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1}=f(u_n)$.

La courbe (C) représentative de la fonction f et la droite (Δ) d'équation $y=x$.

1. A partir de u_o, en utilisant la courbe (C) et la droite (Δ), on a placé u_1 sur l'axe des abscisses.

De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

2. Placer le point I de la courbe (C) qui a pour abscisse α

3. a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n on a : $1 \leq u_n \leq \alpha$.

   b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

   c) Déterminer sa limite.