

guessmaths

Correction Examen BAC 2019 Rattrapage (2SM)

Exercice 1.

$$\alpha \in \mathbb{C}^*$$

$$I] \quad (E_\alpha): z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$$

$$1- a) \quad \Delta = (i\alpha\sqrt{3})^2 + 4\alpha^2 = \alpha^2.$$

b) $\delta = \alpha$ est une racine carrée de Δ .

$$z = \frac{i\alpha\sqrt{3} - \alpha}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha \quad ; \quad z' = \frac{i\alpha\sqrt{3} + \alpha}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha; \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha \right\}$$

2- On suppose que : $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } \blacksquare \quad z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$$

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right) \cdot |\alpha|e^{i\lambda}$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot |\alpha|e^{i\lambda}$$

$$= |\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\blacksquare \quad z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right) \cdot |\alpha|e^{i\lambda}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot |\alpha|e^{i\lambda}$$

$$= |\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$II] \quad \Omega(\alpha); M_1(z_1); M_2(z_2) \text{ avec } z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha \text{ et } z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha.$$

$$R = R\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$$

1- a) Montrons que : $R(\Omega) = M_1$,

$$\text{On a : } \bullet z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}\alpha$$

$$\text{Donc } R(\Omega) = M_1$$

Montrons que : $R(M_1) = M_2$

$$\text{On a : } \bullet \frac{z_2}{z_1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-(1-i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{-(2-2i\sqrt{3})}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Donc } z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z_1, \text{ alors } R(M_1) = M_2.$$

$$b) \bullet R(\Omega) = M_1 ; \text{ donc : } \begin{cases} O\Omega = OM_1 \\ \left(\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{OM_1} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

Alors le triangle $O\Omega M_1$, est équilatéral.

$$\bullet R(M_1) = M_2 ; \text{ Donc : } \begin{cases} OM_1 = OM_2 \\ \left(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

Alors le triangle $OM_1 M_2$ est équilatéral.

2- a) Vérifions que : $z_1 - z_2 = \alpha$

$$z_1 - z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \alpha - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \alpha = \alpha.$$

b) Montrons que les droites (ΩM_2) et (OM_1) sont perpendiculaires.

$$\text{On a : } \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - 0} = \frac{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \alpha - \alpha}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \alpha} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$$

$$\text{Donc : } \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - 0} = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Alors } \arg \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - 0} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$\text{D'où } \left(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{\Omega M_2} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi], \text{ par suite } (\Omega M_2) \perp (OM_1).$$

c- Dédudisons que : $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.

On a : $z_1 - z_2 = \alpha$ (d'après : 2-a))

Donc $\overrightarrow{M_2 M_1} = \overrightarrow{O\Omega}$ alors $O\Omega M_1 M_2$ est un parallélogramme.

Et comme ses diagonales (ΩM_2) et (OM_1) sont perpendiculaires.

Alors $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.

$$3- \text{ Soit } \theta \in \mathbb{R}. \text{ Montrons que : } Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}} \in \mathbb{R}.$$

$$\text{On a : } Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \times \frac{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}$$

D'après 1-b), les triangles $O\Omega M_1$, et $OM_1 M_2$ sont équilatéraux.

Donc : $O\Omega = \Omega M_1 = M_1 O$ et $OM_1 = M_1 M_2 = OM_2$

On en déduit que : $OM_1 = OM_2 = O\Omega = |\alpha|$

Donc M_1 ; M_2 et Ω appartiennent an cercle (C) de centre O et de rayon $|\alpha|$.

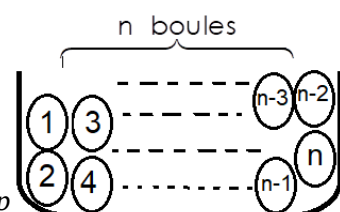
Soit $M(|\alpha|e^{i\theta})$ alors : $OM = |\alpha|$, donc $M \in (C)$

Par suite, les points M_1 ; M_2 ; Ω et M sont Cocycliques.

$$\text{Donc : } \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \cdot \frac{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}} \in \mathbb{R} \text{ d'où } Z \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.

« On tire les n boules de l'urne successivement et sans remise ».



Alors $\text{Card}\Omega = A_n^n = n!$.

Soit l'évènement : A « Les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et sous- cet ordre »

La boule n° 3, peut apparaître pendant les tirages, 3, 4, ... n, donc il y'a (n - 2) choix possibles, et comme le tirage est successif et sans remise, alors :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{(A_1^1 A_2^1 A_3^1)(n-2) \cdot A_{n-3}^{n-3}}{n!} \\ &= \frac{(n-2) \cdot (n-3)!}{n!} \\ &= \frac{(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Donc : $P(A) = \frac{1}{n(n-1)}$

2) Soit l'évènement : B « les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre »

Il y'a C_n^3 choix possibles de choisir les boules 1, 2 et 3 dans cet ordre parmi n boules, puis on tire les (n - 3) boules restantes successivement et sans remise parmi (n - 3).

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(B) &= \frac{(A_1^1 A_2^1 A_3^1) C_n^3 \cdot A_{n-3}^{n-3}}{n!} \\ &= \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot (n-3)! \\ &= \frac{1}{3!} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

D'où : $P(B) = \frac{1}{6}$

3) X_n : variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3.

On peut obtenir les boules 1 ; 2 et 3 après au moins un 3^{ième} tirage ; un 4^{ième} tirage jusqu'au n^{ième} tirage ;

Donc $X_n(\Omega) = \{3; 4; 5; \dots; n\}$.

$(X_n = k)$ est l'évènement : « obtenir les trois boules 1 ; 2 et 3 au k^{ième} tirage dans un ordre quelconque ».

il y'a $3! = 6$ choix possibles pour de choisir les trois boules 1 ; 2 et 3.

La troisième boule étant choisie, alors il y'a C_{k-1}^2 de choisir les deux autres.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } P(X_n = k) &= \frac{3!(A_1^1 A_2^1 A_3^1) C_{k-1}^2 \cdot A_{n-3}^{n-3}}{n!} \\ &= \frac{6 \frac{(k-1)!}{2!(k-3)!} \cdot (n-3)!}{n!} \\ &= \frac{3 \frac{(k-1)!}{(k-3)!}}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } P(X_n = k) = \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

2^{ème} méthode :

On choisit un élément parmi 1, 2 et 3, donc il y'a $A_3^1 = 3$ choix possible.

La troisième boule étant choisie, il y'a donc A_{k-1}^2 possibilités de choisir les deux autres boules successivement et sans remise.

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(X_n = k) &= \frac{(A_3^1 A_{k-1}^2) \cdot A_{n-3}^{n-3}}{n!} \\ &= \frac{3(k-1)(k-2) \cdot (n-3)!}{n(n-1)(n-2)(n-3)!} \\ &= \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } P(X_n = k) = \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

Exercice 3 :

Soit l'espace vectoriel $(\mathcal{V}_2, +, \cdot)$ de dimension 2 et $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}_2$.

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} ; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\forall (x; y; x'; y') \in \mathbb{R}^4 : (x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx' + yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j}$$

1) a Montrons que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de $\mathcal{V}_2$.

Soit $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = \vec{0} &\Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) + \beta\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)\vec{j} = \vec{0} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases} \quad (\text{car } (\vec{i}; \vec{j}) \text{ est une base de } \mathcal{V}_2) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

Donc $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une famille libre de $\mathcal{V}_2$.

Et comme $\dim \mathcal{V}_2 = 2$, alors $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de $\mathcal{V}_2$.

Méthode 2 :

$$\text{Dans la base } (\vec{i}; \vec{j}), \text{ on a : } \vec{e}_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \text{ et } \vec{e}_2 \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right); \det(\vec{e}_1; \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0 \text{ et}$$

$\dim \mathcal{V}_2 = 2$; donc $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de $\mathcal{V}_2$.

b) Un calcul simple nous donne : $\vec{e}_1 * \vec{e}_1 = \vec{e}_1$; $\vec{e}_2 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2$ et $\vec{e}_1 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2 * \vec{e}_1 = \vec{0}$.

c) Soit $(x; y; x'; y') \in \mathbb{R}^4$.

Montrons que : $(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) * (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) = xx'\vec{e}_1 + yy'\vec{e}_2$

$$\blacksquare \quad x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) + y\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\ = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\vec{j}$$

$$\blacksquare \quad x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 = x'\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) + y'\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\ = \left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\vec{j}$$

Donc :

$$(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) * (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) = \left[\frac{1}{4}(x+y)(x'+y') + \frac{1}{4}(x-y)(x'-y') \right] \vec{i} + \left[\frac{1}{4}(x+y)(x'-y') + \frac{1}{4}(x-y)(x'+y') \right] \vec{j} \\ = \left(\frac{1}{2}xx' + \frac{1}{2}yy' \right) \vec{i} + \left(\frac{1}{2}xx' - \frac{1}{2}yy' \right) \vec{j}$$

$$\text{D'autre part : } xx'\vec{e}_1 + yy'\vec{e}_2 = \frac{1}{2}xx'\vec{i} + \frac{1}{2}xx'\vec{j} + \frac{1}{2}yy'\vec{i} - \frac{1}{2}yy'\vec{j} \\ = \left(\frac{1}{2}xx' + \frac{1}{2}yy' \right) \vec{i} + \left(\frac{1}{2}xx' - \frac{1}{2}yy' \right) \vec{j}$$

$$\text{Donc : } \boxed{(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) * (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) = xx'\vec{e}_1 + yy'\vec{e}_2}$$

2) Pour tout $(x; x'; y; y') \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) * (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) = xx'\vec{e}_1 + yy'\vec{e}_2 \\ = x'x\vec{e}_1 + y'y\vec{e}_2 \quad (\text{car } \times \text{ est commutative dans } \mathbb{R}) \\ = (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) * (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)$$

Donc * est Commutative dans $\mathcal{V}_2$.

b) pour tout $(x; x'; y; y'; z; z') \in \mathbb{R}^6$, on a :

$$\left[(x\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2) * (y\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) \right] * (z\vec{e}_1 + z'\vec{e}_2) = (xy\vec{e}_1 + x'y'\vec{e}_2) * (z\vec{e}_1 + z'\vec{e}_2) \\ = ((xy)z\vec{e}_1 + (x'y')z'\vec{e}_2) \\ = (x(yz)\vec{e}_1 + x'(y'z')\vec{e}_2) \\ = (x\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2) * (yz\vec{e}_1 + y'z'\vec{e}_2) \\ = (x\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2) * \left[(y\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) * (z\vec{e}_1 + z'\vec{e}_2) \right]$$

Donc * est associative dans $\mathcal{V}_2$.

c) pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) * (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (x.1)\vec{e}_1 + (y.1)\vec{e}_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

et comme * est commutative dans $\mathcal{V}_2$, alors :

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) * (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

et $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \in \mathcal{V}_2$; donc $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ est l'élément neutre pour $(\mathcal{V}_2; *)$

d) On a $(\mathcal{V}_2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, donc $(\mathcal{V}_2; +)$ est un groupe commutatif ; et on a : $*$ est associative dans $\mathcal{V}_2$.

Montrons que $*$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathcal{V}_2$.

Soit $(x; x'; y; y'; z; z') \in \mathbb{R}^6$.

$$(x\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2) * [(y\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) + (z\vec{e}_1 + z'\vec{e}_2)] = (x\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2) * ((y+z)\vec{e}_1 + (y'+z')\vec{e}_2)$$

$$= (x(y+z)\vec{e}_1 + x'(y'+z')\vec{e}_2)$$

$$= ((xy + xz)\vec{e}_1 + (x'y' + x'z')\vec{e}_2)$$

$$= ((xy\vec{e}_1 + x'y'\vec{e}_2) + (xz\vec{e}_1 + x'z'\vec{e}_2))$$

$$= ((x\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2) * (y\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2)) + ((x\vec{e}_1 + x'\vec{e}_2) * (z\vec{e}_1 + z'\vec{e}_2))$$

Donc $*$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathcal{V}_2$.

Par Suite $(\mathcal{V}_2; +; *)$ est un anneau.

Et comme $*$ est commutative et admet un élément neutre $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ dans $\mathcal{V}_2$.

Alors $(\mathcal{V}_2; +; *)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) Soit $\vec{U} \in \mathcal{V}_2 - \{\vec{0}\}$; $E_{\vec{U}} = \{\lambda\vec{U} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

a) Montrons que $(E_{\vec{U}}; +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{V}_2; +)$.

• On a : $E_{\vec{U}} \subset \mathcal{V}_2$ (Car : $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{U} \in \mathcal{V}_2 \Rightarrow \lambda\vec{U} \in \mathcal{V}_2$)

Et $\vec{0} \in E_{\vec{U}}$ ($0 = 0 \cdot \vec{U}$) ; donc $E_{\vec{U}} \neq \emptyset$.

• Soit $(\vec{v}; \vec{v}') \in E_{\vec{U}}^2$; alors $\exists(\lambda; \lambda') \in \mathbb{R}^2$: $\vec{v} = \lambda\vec{U}$ et $\vec{v}' = \lambda'\vec{U}$

$$\vec{v} - \vec{v}' = \lambda\vec{U} - \lambda'\vec{U} = (\lambda - \lambda')\vec{U}$$

Comme $(\lambda - \lambda') \in \mathbb{R}$; alors $(\vec{v} - \vec{v}') \in E_{\vec{U}}$

Donc $(E_{\vec{U}}; +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{V}_2; +)$.

b) Montrons que $(E_{\vec{U}}, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{V}_2, +, \cdot)$.

• On a : $E_{\vec{U}} \subset \mathcal{V}_2$ et $E_{\vec{U}} \neq \emptyset$.

• Soit $(\vec{v}; \vec{v}') \in E_{\vec{U}}^2$ et $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

Alors $\exists(\lambda; \lambda') \in \mathbb{R}^2$: $\vec{v} = \lambda\vec{U}$ et $\vec{v}' = \lambda'\vec{U}$

$$\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}' = (\alpha\lambda)\vec{U} + (\beta\lambda')\vec{U} = (\alpha\lambda + \beta\lambda')\vec{U} ; \text{ et comme } (\alpha\lambda + \beta\lambda') \in \mathbb{R} \text{ alors : } (\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}') \in E_{\vec{U}} .$$

Donc $(E_{\vec{U}}, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{V}_2, +, \cdot)$.

c) Montrons que $E_{\vec{U}}$ est stable pour $*$ $\Leftrightarrow (\vec{U} * \vec{U}; \vec{U})$ est liée.

•) Supposons que $E_{\vec{U}}$ est stable pour $*$.

Alors $\forall (\vec{x}; \vec{y}) \in E_{\vec{0}}^2 : (\vec{x} * \vec{y}) \in E_{\vec{0}}$.

Or $\vec{0} \in E_{\vec{0}}$ (Car : $\vec{0} = 1.\vec{0}$ et $1 \in \mathbb{R}$)

Donc $(\vec{0} * \vec{0}) \in E_{\vec{0}}$; donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} : (\vec{0} * \vec{0}) = \lambda \vec{0}$

D'où $\exists \lambda \in \mathbb{R} ; (\vec{0} * \vec{0}) - \lambda \vec{0} = \vec{0}$

Et $(1; -\lambda) \neq (0; 0)$, donc $(\vec{0} * \vec{0}; \vec{0})$ est un système lié de $\mathcal{V}_2$.

•) Supposons que la famille $(\vec{0} * \vec{0}; \vec{0})$ est liée.

Soit $(\vec{x}; \vec{y}) \in E_{\vec{0}}^2$

Donc $\exists (\lambda; \lambda') \in \mathbb{R}^2 : \vec{x} = \lambda \vec{0}$ et $\vec{y} = \lambda' \vec{0}$

$(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de $\mathcal{V}_2$ et $\vec{0} \in \mathcal{V}_2$.

Alors $\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 : \vec{0} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \vec{x} * \vec{y} &= (\lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2)) * (\lambda'(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2)) \\ &= ((\lambda \alpha \vec{e}_1 + \lambda \beta \vec{e}_2)) * ((\lambda' \alpha \vec{e}_1 + \lambda' \beta \vec{e}_2)) \\ &= \lambda \lambda' \alpha^2 \vec{e}_1 + \lambda \lambda' \beta^2 \vec{e}_2 \\ &= \lambda \lambda' (\alpha^2 \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \vec{0} * \vec{0} = (\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2) * (\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2) = \alpha^2 \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2$$

$$\text{donc : } \vec{x} * \vec{y} = \lambda \lambda' (\vec{0} * \vec{0}).$$

Et comme la famille $(\vec{0} * \vec{0}; \vec{0})$ est liée, alors $(\exists k \in \mathbb{R}) : \vec{0} * \vec{0} = k \vec{0}$

Donc : $\vec{x} * \vec{y} = \lambda \lambda' (k \vec{0}) = (\lambda \lambda' k). \vec{0} \in E_{\vec{0}}$; d'où $\forall (\vec{x}; \vec{y}) \in E_{\vec{0}}^2$ on a : $\vec{x} * \vec{y} \in E_{\vec{0}}$

alors $E_{\vec{0}}$ est stable pour $*$.

Donc $E_{\vec{0}}$ est stable pour $*$ $\Leftrightarrow$ la famille $(\vec{0} * \vec{0}; \vec{0})$ est liée dans $\mathcal{V}_2$.

4) On suppose que : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^*) ; \vec{0} * \vec{0} = \alpha \vec{0}$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^* &\rightarrow E_{\vec{0}} - \{\vec{0}\} \\ x &\mapsto \frac{x}{\alpha} \vec{0} \end{aligned}$$

a) Montrons que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*; x)$ vers $(E_{\vec{0}} - \{\vec{0}\}; *)$

Soit $\vec{v} \in E_{\vec{0}} - \{\vec{0}\}$

Alors $(\exists \lambda \in \mathbb{R}^*) : \vec{v} = \lambda \vec{0}$. (car $\vec{0} \neq \vec{0}$)

$$\text{Donc : } \varphi(x) = \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} \vec{u} = \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} = \lambda \quad (\text{car } \vec{u} \neq \vec{0})$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha\lambda \in \mathbb{R}^* \quad (\text{car } \alpha \neq 0 \text{ et } \lambda \neq 0)$$

$$\text{donc : } \left(\forall \vec{v} \in E_{\vec{u}} - \{\vec{0}\} \right) ; \left(\exists ! x \in \mathbb{R}^* \right) / \varphi(x) = \vec{v}.$$

d'où φ est bijective.

• Soit $(x; x') \in (\mathbb{R}^*)^2$

$$\varphi(x \times x') = \frac{xx'}{\alpha} \vec{u}$$

$$\varphi(x) * \varphi(x') = \left(\frac{x}{\alpha} \vec{u} \right) * \left(\frac{x'}{\alpha} \vec{u} \right)$$

$$(\vec{u} \in \mathcal{V}_2), \text{ donc } (\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2) : \vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

$$\left(\frac{x}{\alpha} \vec{u} \right) * \left(\frac{x'}{\alpha} \vec{u} \right) = \left(\frac{xa}{\alpha} \vec{e}_1 + \frac{xb}{\alpha} \vec{e}_2 \right) * \left(\frac{x'a}{\alpha} \vec{e}_1 + \frac{x'b}{\alpha} \vec{e}_2 \right)$$

$$= \frac{xx'a^2}{\alpha^2} \vec{e}_1 + \frac{xx'b^2}{\alpha^2} \vec{e}_2$$

$$= \frac{xx'}{\alpha^2} (a^2 \vec{e}_1 + b^2 \vec{e}_2)$$

$$= \frac{xx'}{\alpha^2} (\vec{u} * \vec{u})$$

$$\text{Et comme } \vec{u} * \vec{u} = \alpha \vec{u}, \text{ alors } \varphi(x) * \varphi(x') = \frac{xx'}{\alpha^2} (\alpha \vec{u}) = \frac{xx'}{\alpha} \vec{u}$$

$$\text{Donc } \varphi(x \times x') = \varphi(x) * \varphi(x')$$

$$\text{Alors } \varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{R}^*; \times) \text{ vers } (E_{\vec{u}} - \{\vec{0}\}; *).$$

$$\text{D'où } \varphi \text{ est un isomorphisme de } (\mathbb{R}^*; \times) \text{ vers } (E_{\vec{u}} - \{\vec{0}\}; *).$$

b) On a φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*; \times)$ vers $(E_{\vec{u}} - \{\vec{0}\}; *)$ et $(\mathbb{R}^*; \times)$ est un groupe commutatif, alors $(E_{\vec{u}} - \{\vec{0}\}; *)$ est un groupe commutatif.

Et comme $(E_{\vec{u}}; +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $\vec{0}$ et $*$ est distributive par rapport à $+$ dans $E_{\vec{u}}$;

Alors $(E_{\vec{u}}; +; *)$ est un corps commutatif.

Exercise 4 :

Partie I

$$I =]-1; +\infty[, (\forall x \in I); g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$$

1- a) ■ $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x)\ln(1+x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$ (on pose $t = 1+x$)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x^2) = 2; \text{ Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 2}$$

b) ■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \ln(1+x) \right) = -\infty$$

(Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$)

D'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty}$.

2- $x \mapsto 1+x$ est dérivable et strictement positive sur I.

Donc $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto 2x(1+x)\ln(1+x)$ sont dérivables sur I. Et $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur I. alors g est dérivable sur I.

Pour tout $x \in I$, on a : $g'(x) = 2x - 2(1+2x)\ln(1+x) - 2x(1+x) \cdot \frac{1}{(1+x)}$

$$\begin{aligned} &= 2x - 2(1+2x)\ln(1+x) - 2x \\ &= -2(1+2x)\ln(1+x) \end{aligned}$$

3- a) On a : g est dérivable sur I, donc elle est continue sur I, par suite elle est continue sur $]0; +\infty[$

Et comme g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, alors sa restriction sur $]0; +\infty[$ est bijective de $]0; +\infty[$ vers $g(]0; +\infty[) =]-\infty; 1[$

et comme $0 \in]-\infty; 1[$, alors $(\exists! \alpha \in]0; +\infty[): g(\alpha) = 0$.

b) On a : $g(1) = 2 - 4\ln 2 = 2(1 - 2\ln 2)$

$\ln 2 \approx 0,7$ donc $2\ln 2 \approx 1,4$ d'où $1 - 2\ln 2 < 0$

Alors $g(1) < 0$; donc $g(1) < g(\alpha)$ et comme g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $(1; \alpha) \in]0; +\infty[$, alors $1 > \alpha$.

c) On a g est continue et strictement décroissante sur $[0; +\alpha[$, alors : $g([0; \alpha]) = [g(\alpha); g(0)] =]0; 1]$

Donc : $\forall x \in [0; \alpha[; g(x) > 0$

Et d'après le Tableau de Variation de g, on a : $\frac{5}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ est une valeur minimale de g sur $]-1; 0]$.

Donc $\forall x \in]-1; 0]$; $g(x) \geq \frac{5}{4} - \frac{\ln 2}{2} > 0$

D'où $\forall x \in]-1; \alpha[$; $g(x) > 0$.

Et, on a : $g(] \alpha ; +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; g(\alpha)[=] -\infty ; 0[$.

Donc $(\forall x \in] \alpha ; +\infty[)$; $g(x) < 0$

Partie II :

$(\forall x \in I) : f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

1- a) On a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

On en déduit que la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{1+x^2} \right)$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ ($t = 1+x$) , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{1+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

On en déduit que la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sont dérivables sur I ; donc f est dérivable sur I.

Pour tout $x \in I$ on a : $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x^2) - 2x \ln(1+x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x(1+x) \ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

D'où : $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

2) b) On a : $(\forall x \in I) ; f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$; d'où le Tableau de Variation de f :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

c) On a : $g(\alpha) = 0$ donc $1 + \alpha^2 - 2\alpha(1 + \alpha)\ln(1 + \alpha) = 0$

D'où $1 + \alpha^2 = 2\alpha(1 + \alpha)\ln(1 + \alpha)$

On en déduit que : $\frac{\ln(1 + \alpha)}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(1 + \alpha)}$, d'où $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1 + \alpha)}$

D'après le Tableau de Variation de f on a : $f(\alpha)$ est une valeur maximale de f

Donc : $(\forall x \in I) ; f(x) \leq f(\alpha)$

D'où : $(\forall x \in I) ; f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(1 + \alpha)}$

3)-a) L'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

(T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$; d'où (T) : $y = x$.

b) Montrons que : $(\forall x > 0) ; \ln(1 + x) < x$.

Pour tout $x > 0$, on pose : $h(x) = x - \ln(1 + x)$

h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\forall x \in]0 ; +\infty[) ; h'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x} > 0$.

Donc h est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

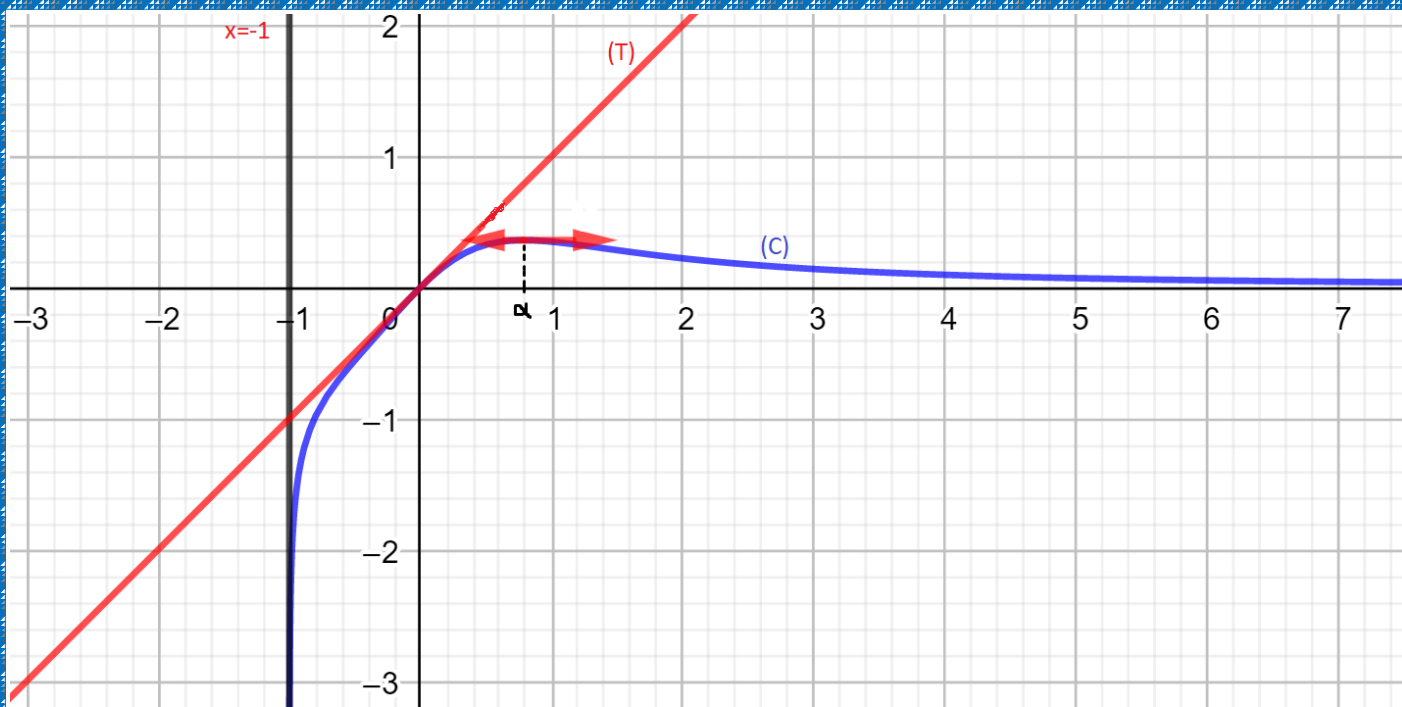
Alors $(\forall x > 0) ; h(x) > h(0)$ et $h(0) = 0$

Donc : $(\forall x > 0) ; h(x) > 0$; d'où $(\forall x > 0) ; \ln(1 + x) < x$.

c) On a pour tout $x > 0$: $0 < \ln(1 + x) < x$ et $0 < \frac{1}{1 + x^2} < 1$

Donc $0 < \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} < x$

D'où $(\forall x > 0) ; f(x) < x$



Partie III

$$J = \int_0^1 f(x) dx$$

1- a) On pose : $t = \frac{1-x}{1+x}$ alors $x = \frac{1-t}{1+t}$ et $dx = \frac{-2}{(1+t)^2} dt$

$$\begin{cases} x=0 \Leftrightarrow t=1 \\ x=1 \Leftrightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_1^0 \frac{\ln\left(1 + \frac{1-t}{1+t}\right)}{1 + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} \times \frac{-2}{(1+t)^2} dt$$

$$\text{D'où } J = 2 \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)}{2+t^2} dt = \int_0^1 \frac{\ln(2) - \ln(1+t)}{1+t^2} dt$$

$$\text{Soit } J = \ln(2) \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt = \ln(2) [\arctan t]_0^1 - J$$

$$\text{D'où } 2J = \frac{\pi}{4} \ln 2 ; \text{ par suite } \boxed{J = \frac{\pi}{8} \ln 2}$$

b) L'aire demandé est : $A = \left(\int_0^1 |f(x) - x| dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \text{cm}^2 = \left(\int_0^1 |f(x) - x| dx \right) \times 4 \text{cm}^2$

Et d'après (II-3-c) : $(\forall x > 0) ; f(x) < x$

Donc sur $[0;1]$; $|f(x) - x| = x - f(x)$

$$\text{Alors } A = \left(\int_0^1 x - f(x) \, dx \right) \times 4 \text{cm}^2 = \left(4 \int_0^1 x \, dx - 4 \int_0^1 f(x) \, dx \right) \times \text{cm}^2$$

$$\text{D'où } A = \left(4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - 4J \right) \text{cm}^2 = (2 - 4J) \text{cm}^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2} \ln 2 \right) \text{cm}^2.$$

$$\text{Finalement : } A = \left(2 - \frac{\pi}{2} \ln 2 \right) \text{cm}^2$$

$$2- K = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} u(x) = \arctan x \\ v'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases} \quad \text{alors : } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = \ln(1+x) \end{cases}$$

U et v sont dérivables sur $[0;1]$ et u' ; v' sont continues sur $[0;1]$,

$$\text{Par intégration par parties, on trouve : } K = \left[(\arctan x) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \ln(2) - J$$

$$\text{Et comme } J = \frac{\pi}{8} \ln(2) , \text{ alors } \boxed{K = \frac{\pi}{8} \ln(2)}$$