guessmaths

Exercices 4 Généralités sur les fonctions — *Tronc Commun*

Exercice 1

1) Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x}$

Montrer que pour tout $x > 1$; $0 < f(x) < \dfrac{1}{2}$

2) Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$

3) a- Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions : $k : x \mapsto 1+|x|+2x^2$ et $g : x \mapsto |x+2|-3$

b- En déduire le minimum sur $\mathbb{R}$ des fonctions k et g.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x-2|+2|x|$

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles.

2) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) résoudre l'inéquation : $f(x) \leq 3-x$

Exercice 4

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2+6x+4$ et $g(x) = x^2$

On désigne par C_g la courbe de la fonction g et par C_f celle de f.

1) Montrer qu'il existe trois réels a ; α et b tel que : $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$.

2) En déduire alors que : $C_f = t_{\vec{u}}(C_g)$ où $\vec{u}$ est un vecteur à préciser.

3) Etudier les variations de g et tracer dans le même repère C_f et C_g.

4) Donner un minorant de f en justifiant la réponse.

Exercice 5

Dans la figure ci-dessous, on a représenté la restriction à $\mathbb{R}^+$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

1) Terminer la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer un majorant et un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

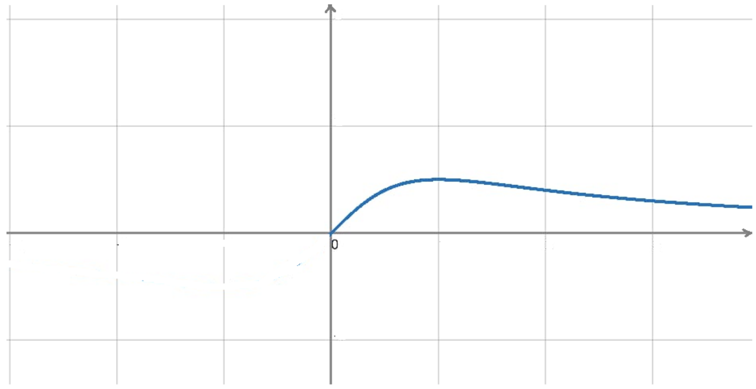
3) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}x$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq \dfrac{1}{2}x$.

4) On pose $g(x) = |f(x)|$

a) Tracer la courbe (C_g) de g dans le même repère.

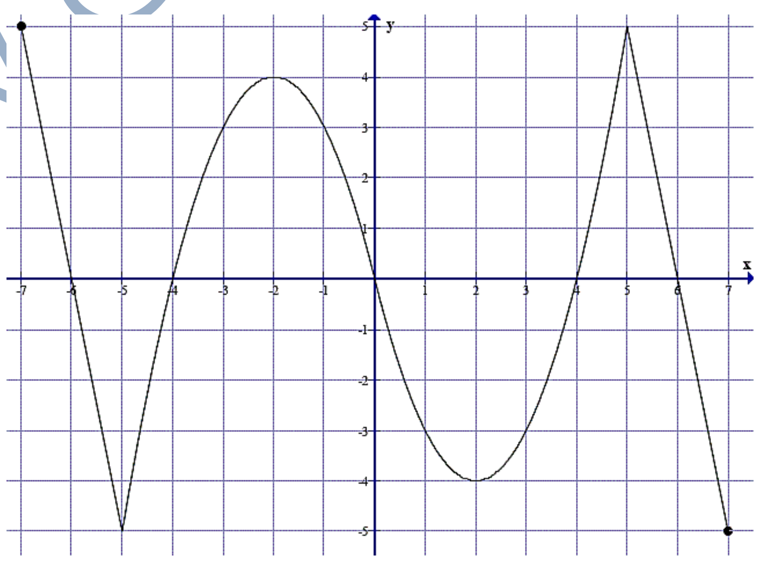
b) En quelles valeurs la fonction g atteint-elle son maximum ?



Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on a tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur un ensemble D.

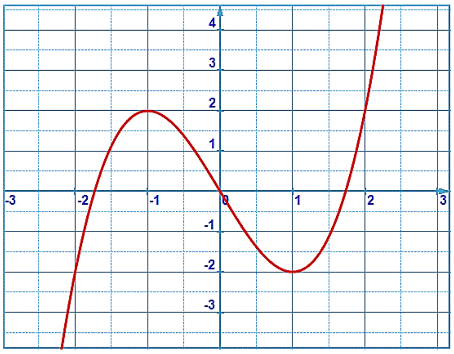
1) Déterminer D
2) Etudier la parité de f
3) Etudier les variations de f
4) Résoudre l'équation : $f(x)=0$.
5) Discuter selon m le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$
6) Tracer par deux couleurs différentes la courbe représentatives de la fonction $|f|$ et $-f$
7) On donne $g(x)=\sqrt{f(x)}$
   a) Résoudre l'inéquation: $f(x)\geq 0$
   b) Déterminer le domaine de définition de g
   c) Etudier les variations de g.



Exercice 7

La courbe (C_f) donnée ci-dessous représente l'allure d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) f est-t-elle paire ? est-t-elle impaire? Justifier votre réponse.
2) Donner le minimum et le maximum de f sur $[-2;2]$.
3) Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4) Construire dans le même repère les courbes représentatives des fonctions :
$h : x \mapsto |f(x)|$ et $k : x \mapsto f(|x|)$.



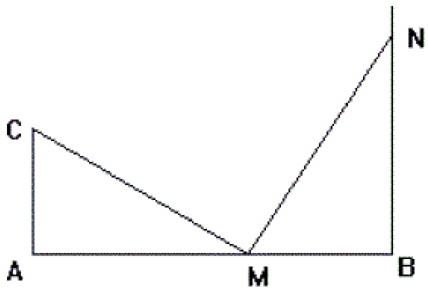
Exercice 8

Un robinet A remplit une cuve en 10 minutes; un robinet B remplit cette même cuve en «x » minutes. On suppose les débits constants.
On les ouvre en même temps.
1) Montrer que le temps de remplissage, en minutes, de la cuve en fonction de x est :
$10-\dfrac{100}{x+10}$.
2) Montrer que la fonction f qui à x associe le temps de remplissage est une fonction croissante.
3) Soit D la droite d'équation $y=10$. Expliquer pourquoi la courbe représentative de f se situe sous cette droite.
4) Tracer cette droite D et la courbe représentative de f dans un même repère.

Exercice 9

On donne dans un plan P deux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que : $AB=5$; $AC=\sqrt{3}$ et $(AB)\perp(AC)$
Soit M un point variable du segment $[AB]$ privé de A et B.
La perpendiculaire à (CM) en M et la perpendiculaire à (AB) en B se coupent en N.
On pose $AM=x$ et on désigne par $A(x)$ l'aire du triangle CMN.

1) a) Montrer que : $A(x)=\dfrac{(5-x)(3+x^2)}{2\sqrt{3}}$.



b) Donner un majorant de $A(x)$.

2/ Soit f la fonction définie sur $[0;5]$ *par :* $f(x)=(5-x)(3+x^2)$.

a) Vérifier que : $f(x)=24-(3-x)^2(1+x)$

b) En déduire que $A(x)$ *admet un maximum que l'on précisera.*

3/ Calculer $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$ *et* $f(5)$.

En déduire qu'il existe exactement trois position du point M pour lesquelles l'aire du triangle CMN *est égale à* $\frac{133\sqrt{3}}{54}$.