Exercice n °6 sur les suites

Exercice 6: *(avec solution)*

Soit (U_n) *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} U_0 = \dfrac{9}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{6+U_n}{2+U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

1- *Montrer que :* $(\forall n \in IN) \quad U_n > 1$

2- *Soit* (V_n) *la suite numérique définie par :* $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 3} \quad (\forall n \in IN)$

a) *Montrer que* (V_n) *est une suite géométrique, puis écrire* V_n *en fonction de n.*

b) *Ecrire* U_n *en fonction de n. et Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Correction Exercice 6

1- *Montrons par recurrence que :* $(\forall n \in IN) \quad U_n > 1$.

■ Initialisation

pour n=0 on a $U_0 = \dfrac{9}{2}$ *donc* $U_0 > 1$

■ *Hérédité*

Supposons que pour $n \in IN$ *on a :* $U_n > 1$ *et montrons que :* $U_{n+1} > 1$

1ére méthode :

On calcule $U_{n+1} - 1$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{6+U_n}{2+U_n} - 1 \Leftrightarrow U_{n+1} - 1 = \frac{6+U_n-(2+U_n)}{2+U_n}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} - 1 = \frac{4}{2+U_n} > 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} > 1$$

2éme méthode :

On a :

$$U_{n+1} = \frac{6+U_n}{2+U_n} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{4+2+U_n}{2+U_n}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 1 + \frac{4}{2+U_n}$$

$$Or: \quad U_n > 1 \Rightarrow 1 + \frac{4}{2+U_n} > 1$$

$$\Rightarrow U_{n+1} > 1$$

Conclusion : *On a montré par récurrence que :* $(\forall n \in IN) \quad U_n > 1$

2- *On a :* $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 3} \quad (\forall n \in IN)$

$$(\forall n \in IN) \qquad V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 3}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) \qquad V_{n+1} = \frac{\frac{6+U_n}{2+U_n} - 2}{\frac{6+U_n}{2+U_n} + 3}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) \qquad V_{n+1} = \frac{6+U_n - 2(2+U_n)}{6+U_n + 3(2+U_n)}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) \qquad V_{n+1} = \frac{2-U_n}{12+4U_n}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) \qquad V_{n+1} = -\frac{U_n - 2}{4(U_n+3)}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) \qquad V_{n+1} = -\frac{1}{4}V_n$$

D'où (V_n) *est une suite géométrique de raison* $q = -\frac{1}{4}$ *et de premier terme :*

$$V_0 = \frac{U_0 - 2}{U_0 + 3} = \frac{\frac{9}{2} - 2}{\frac{9}{2} + 3} = \frac{9-4}{9+6} = \frac{1}{3} \qquad \boxed{V_0 = \frac{1}{3}}.$$

On a : $(\forall n \in IN) \qquad V_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

b) $(\forall n \in IN) \quad V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 3} \Rightarrow (\forall n \in IN) \quad V_n(U_n + 3) = U_n - 2$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) \quad U_n(V_n - 1) = -3V_n - 2$$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) \quad U_n = \frac{2+3V_n}{1-V_n}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) \qquad U_n = \frac{2 + 3\left(\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \left(\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in IN) \qquad U_n = \frac{2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)}$$

Donc $\boxed{(\forall n \in IN) \qquad U_n = \frac{2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)}}$

$$Et \left(\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad car \quad -1<-\frac{1}{4}<1 \right) d'où : \lim_{n\to+\infty} U_n = 2$$