Exercice 4 :(avec solution)

Soit f une fonction définie par : $f(x)=x-2\sqrt{x-1}$

1- Déterminer le domaine de définition de f , et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- Etudier les branches paraboliques de C_f au voisinage de $+\infty$.

3- Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 ;puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu .

4- Montrer que : $(\forall x\in]1;+\infty[)\quad f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}\left(1+\sqrt{x-1}\right)}$,puis dresser

Le tableau de variation de f sur D_f .

5- Construire C_f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

6- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer .

b) Construire $\left(C_{g^{-1}}\right)$(la courbe de g^{-1}) dans le même repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable au point 1 calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$

(sachant que $g(5)=1$).

d) Vérifier que : $g(x)=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$, puis donner l'expression de g^{-1} en fonction de x dans J .

Correction Exercice 4

$f(x)=x-2\sqrt{x-1}$

1-• $D_f=\{x\in IR\,/\,(x-1\geq 0)\}=[1;+\infty[$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\sqrt{x-1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=+\infty\quad\left(Car\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=0\right)$$

2 − • $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2\sqrt{x-1}}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-2\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}\right)=1 \quad \left(Car \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}=0\right)$$

<u>Calculons</u> $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-2\sqrt{x-1}\right)$

$$=-\infty$$

Donc (C_f) *admet une branche parabolique au voisinage de* $+\infty$ *de direction la droite d'équation* $y=-x$.

3- *<u>Calculons</u>* $f'(x)$

$$\left(\forall x\in\left]1;+\infty\right[\right)f'(x)=\left(x-2\sqrt{x-1}\right)'$$

$$=1-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\frac{x-1-1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\frac{x-2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

D'où : $\left(\forall x\in\left]1;+\infty\right[\right)f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$

Donc le signe de $f'(x)$ *est celui de* $(x-2)$.

Tableau de variation :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(2)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

5- Construction de (C_f) voir la fin de la correction.

6- g est la restriction de f sur $[2;+\infty[$.

a) g est continue et strictement croissante sur $[2;+\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque définie sur $J = g([2;+\infty[) = [0;+\infty[$.

b) Construction de $(C_{g^{-1}})$ voir la fin de la correction.

c) $g(5) = 1 \Leftrightarrow g^{-1}(1) = 5$

$$\Rightarrow g'(g^{-1}(1)) = g'(5) = \frac{5-2}{\sqrt{5-1}\left(1+\sqrt{5-1}\right)} = \frac{1}{2} \neq 0$$

d'où g^{-1} *est dérivable en 1 on a :* $\left(g^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(1))} = 2$

d) On a : $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2\sqrt{x-1} + 1$

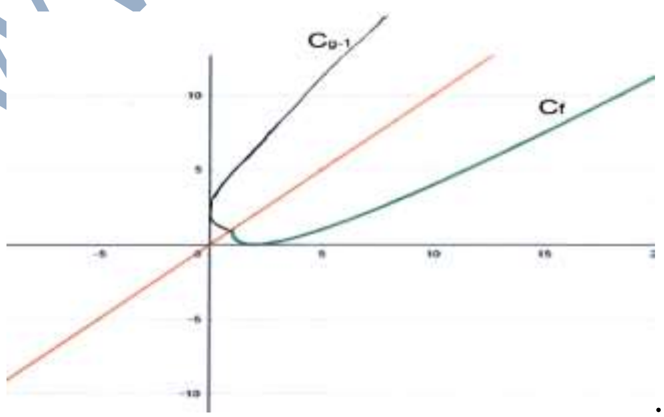
$$= x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1$$

$$= x - 2\sqrt{x-1} = g(x)$$

D'où : $(\forall x \in [2;+\infty[)\ g(x) = \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$

Conclusion : $(\forall x \in [0;+\infty[)\quad g^{-1}(x) = \left(\sqrt{x}+1\right)^2 + 1$

Représentation Graphique



.