## EXERCICE 1:

*Soit n un entier naturel non nul et soit* $f_n$ *la fonction définie sur IR par :* $f_n(x) = x^3 + 3nx + 1$ .

1) a) *Dresser le tableau de variations de* $f_n$

b) *Montrer que* $f_n$ *est une bijection de IR sur IR . On pose h sa réciproque*

c) *Etudier la continuité et le sens de variations de h*

d) *Montrer que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* $\alpha_n \in ]-1;0[$ .

2) a) *Montrer que pour tout réel* $x \in ]-1;0[$ *et pour tout* $n \in IN^*$ : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b) *Montrer que la suite* $(\alpha_n)$ *est croissante et qu'elle est convergente.*

c) *Montrer que pour tout* $n \in IN^*$ : $\alpha_n = \dfrac{-1}{\alpha_n^2 + 3n}$

d) *En déduire que* $\dfrac{-1}{3n} < \alpha_n < \dfrac{-1}{3n+1}$ .

*Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

3- *Tracer* $C_{f_1}$ *et* $C_{f_1^{-1}}$ ; $C_{f_2}$ *et* $C_{f_2^{-1}}$

## EXERCICE 2: ( 4points)

*Dans le même repère Soit f la fonction définie sur* $]-1;1[$ *par* $f(x) = -1 + \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)}$

1) a) *Montrer que f réalise une bijection de* $]-1;1[$ *sur IR*

b) *Montrer que* $f^{-1}$ *est dérivable sur IR et que :* $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{\pi\left((x+1)^2 + 1\right)}$

2) *Soit F la fonction définie sur* $IR^*$ *par* $F(x) = f^{-1}(x-1) + f^{-1}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

a) *Montrer que F est dérivable sur* $IR^*$ *et calculer* $F'(x)$

b) *En déduire que pour tout* $x \in IR_+^*$ , $F(x) = -1$ *et pour tout* $x \in IR_-^*$ ; $F(x) = 1$

3) *Pour tout* $n \in IN^*$ *on pose* $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(f^{-1}\left(\dfrac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(\dfrac{-1}{k}\right)\right)$

a) *Montrer que* $f^{-1}\left(\dfrac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(\dfrac{-1}{k+1}\right) = -1$

b) *Montrer que :* $u_n = -n - f^{-1}\left(\dfrac{-1}{n+1}\right)$ *puis calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ .

## EXERCICE 3:

*Soit f définie par :* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

1°) *Montrer que f admet une fonction réciproque de l'intervalle* $]1;+\infty[$ *sur un intervalle* $J$ *à déterminer.*

*Soit alors g la fonction réciproque de f. Etudier g : ensemble de définition, continuité, sens de variation, dérivabilité.*

Calculer $f(2)$ . En déduire $g'\left(\frac{2}{3}\right)$ .

2°) Expliciter $g(x)$ pour tout $x \in J$ .

**EXERCICE 4:**

On pose pour a réel strictement positif la fonction $f_a$

définie sur $[0;a]$ par : $f(x)=\dfrac{a-x}{a(a+x)}$ .

a) Justifier la dérivabilité de $f_a$ sur $[0;a]$ et calculer sa dérivée.
En déduire le tableau des variations de $f_a$ en précisant les valeurs aux bornes.

b) Montrer que $f_a$ admet une fonction réciproque de $[0;a]$ sur $\left[0;\frac{1}{a}\right]$. On note $f_a^{-1}$ sa fonction réciproque.
Donner le tableau des variations de $f_a^{-1}$ en précisant les valeurs aux bornes.

c) Montrer que $f_{\frac{1}{a}} = f_a^{-1}$.

**EXERCICE 5**

Soit f définie pour x appartenant à $[0;1]$ par : $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$ .

1) Montrer que f est admet une fonction réciproque de $[0;1]$ sur un intervalle $J$ à déterminer.
Etudier la fonction réciproque $f^{-1}$ : ensemble de définition, continuité, sens de variation.

2) Etudier la dérivabilité de $f^{-1}$ sur son ensemble de définition. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Représenter graphiquement $(C_f)$ et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

Préciser les coefficients directeurs des tangentes à $(C_f)$ et à $(C_{f^{-1}})$ aux points d'abscisses 0 et 1.

**EXERCICE 6**

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

$(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que pour tout $x \in ]0;+\infty[$ ; $f'(x)=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on précisera. On note $(C')$ sa courbe représentative

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ .

3) Tracer $(C)$ et $(C')$ dans le même repère

4) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}x$ admet, dans $]0;+\infty[$ une unique solution $\alpha$ vérifiant $\alpha > 1$ .

5) Soit $(u_n)$ la suite définie sur N par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in IN$ , $u_{n+1} = f(2u_n)$ = f(2u,)

*a) Montrer que* $\forall n \in IN, u_n \geq 1$ .

*b) Montrer que pour tout* $x \in [1;+\infty[$ : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

*c) Montrer que pour tout* $n \in IN$ : $\left|u_{n+1} - \dfrac{\alpha}{2}\right| \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\left|u_n - \dfrac{\alpha}{2}\right|$

*d) En déduire que la suite* $(u_n)$ *est convergente et préciser sa limite*

*6) Pour tout entier* $n \geq 2$ ; *on pose on :* $S_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} f^{-1}(k)$

*a) Montrer que pour tout entier* $n \geq 2$ ; $f^{-1}(2n) \leq S_n \leq f^{-1}(n)$

*b) En déduire que la suite* $(S_n)$ *est convergente et déterminer sa limite.*