Exercices série n°12 sur les Suites numériques

2éme Bac PC- SVT

Exercice 1 :

Considérons la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19} \end{cases}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $u_n \geq 9$ *, pour tout n de* $\mathbb{N}$.

2. Montrer que (u_n) *est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.*

3. On pose : $v_n = u_n - 9$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

a- Montrer que (v_n) *est une suite géométrique*

b- Calculer v_n *en fonction de n*

c- Déduire u_n *en fonction de n, puis calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 2 :

Considérons la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{12 - 8u_n}{4 - 3u_n} \end{cases}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que : $u_n > 2$, *pour tout n de* $\mathbb{N}$

2. On pose : $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$

a- Montrer que (v_n) *est une suite arithmétique*

b- Calculer v_n *en fonction de n.*

c- Déduire u_n *en fonction de n , puis calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3 :

Considérons la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7} \end{cases}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que : $u_n \geq 1$, *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

2. Montrer que (u_n) *est décroissante et qu'elle est convergente*

3. On pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

a- Montrer que (v_n) *est une suite géométrique*

b- Calculer v_n *en fonction de n*

c- Déduire u_n *en fonction de n, puis calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. On pose : $S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + ... + \frac{1}{u_{n-1} + 1}$

Calculer S_n *en fonction de n.*

Exercice 4 :

Considérons la fonction f définie sur $I=[0;1]$ *par :* $f(x)=\dfrac{4x+3}{3x+4}$

1. Etudier les variations de f sur $I=[0;1]$

2. Montrer que $f(I)\subset I$.

3. Etudier la position de (C_f) *avec l'axe* $(\Delta): y=x$ *sur* $I=[0;1]$

4. Considérons la suite numérique (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

a- Montrer que : $0\leq u_n\leq 1$ *, pour tout n de* $\mathbb{N}$.

b- Etudier la monotonie de (u_n) .

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2}{3}u_n^{\,2}+2} \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

1 - a – Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n>\sqrt{6}$.

b – Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante, et qu'elle est convergente.*

2- On pose : $v_n=u_n^{\,2}-6$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

a – Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.*

b – Calculer v_n *Puis* u_n *en fonction de n.*

c – Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 6 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0=6 \\ u_{n+1}=\dfrac{6u_n+4}{u_n+6} \end{cases}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1 - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\geq 2$.

2- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante, et qu'elle est convergente.*

3- On pose : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

a – Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique et déterminer sa raison.*

b – Calculer v_n *Puis* u_n *en fonction de n.*

4- Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $I=[1;2]$ *par :* $f(x)=\dfrac{5x-1}{x+3}$.

1 - Etudier les variations de la fonction f.

2 - Montrer que : $f(I)\subset I$.

3 – On considère la suite numérique (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

a – Montrer que : $1\leq u_n\leq 2$ *, pour tout n de* $\mathbb{N}$.

b – Montrer que la suite (u_n) *est décroissante.*

c – Montrer que la suite (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*