

EXERCICE 1:

Déterminer les entiers naturels n tels que $5^n \equiv -1[13]$.

Déterminer les entiers naturels n tels que 13 divise $5^{2n} + 5^n$.

CORRECTION :

On calcule les premiers termes et on trouve : $5^0 \equiv 1[13]$, $5^1 \equiv 5[13]$, $5^2 \equiv -1[13]$, $5^3 \equiv -5[13]$, $5^4 \equiv 1[13]$, $5^5 \equiv 5[13]$, $5^6 \equiv -1[13]$,... On voit clairement apparaître le cycle 1,5,-1,-5,1,5,-1, ce qui nous incite à démontrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $P(p)$ suivante :

$P(p)$: " $5^{4p} \equiv 1[13]$, $5^{4p+1} \equiv 5[13]$, $5^{4p+2} \equiv -1[13]$, $5^{4p+3} \equiv -5[13]$ ".

La propriété $P(0)$ est vraie comme le montre le calcul précédent. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $P(p)$ est vraie, et prouvons $P(p+1)$. Alors on a

$$5^{4(p+1)} = 5^{4p} 5^4 \equiv 1 \times 1 \equiv 1[13].$$

La démonstration pour les trois autres cas est exactement similaire. Donc $P(p+1)$ est vraie.

Ainsi, les entiers naturels solutions de $5^n \equiv -1[13]$ sont exactement les entiers de la forme $4p+2$, avec $p \in \mathbb{N}$.

Écrivons $5^{2n} + 5^n = 5^n(5^n + 1)$. Si $13 \mid 5^{2n} + 5^n$, puisque $5 \wedge 13 = 1$, le théorème de Gauss assure que $13 \mid 5^n + 1$, autrement dit que $5^n \equiv -1[13]$. D'après la question précédente, ceci est équivalent à dire que $n = 4p+2$, avec $p \in \mathbb{N}$. Réciproquement, si $n = 4p+2$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, on sait que $13 \mid 5^n + 1$ et donc $13 \mid 5^n(5^n + 1) = 5^{2n} + 5^n$. Les entiers n solutions sont donc exactement ceux qui s'écrivent $4p+2$ avec $p \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2:

Déterminer les entiers positifs a et b sachant que $a < 4000$ et que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47.

- 1) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $2^{2013} + 562$ par 4.
- 2) Quand on divise un nombre par 12, le reste est 8. Quand on divise ce même nombre par 10, on augmente le quotient de 1 et le reste devient 2. Quel est ce nombre?
- 3) Démontrer que sur la droite $y = 34x + 18$, il n'y a pas de points à coordonnées entières.

CORRECTION :

1) On sait que $a = 82b + 47$, et que $b > 47$. Mais si $b = 49$, alors $82 \times 49 + 47 > 4000$. La seule possibilité est donc $b = 48$, et $a = 3983$.

On commence par remarquer que $2^{2013} = 4 \times 2^{2011}$. Pour l'autre partie, $562 = 4 \times 140 + 2$. On en déduit donc que $2^{2013} + 562 = 4 \times (2^{2011} + 140) + 2$.

Ainsi, le quotient est $2^{2011} + 140$ et le reste est 2.

2) On écrit deux fois la division euclidienne. Notons a le nombre recherché, et q le premier quotient, on trouve $a = 12q + 8$ et $a = 10(q+1) + 2$. Il s'agit maintenant d'un petit système à résoudre, et on trouve $a = 32$.

3) Supposons qu'il existe un point (x, y) à coordonnées entières sur cette droite. Alors, multipliant l'équation de la droite par 8, on trouve que

$$8y = 6x + 1.$$

Mais $2 \mid 8y$, $2 \mid 6x$ et donc $2 \mid 1$, ce qui n'est pas le cas.

EXERCICE 3:

Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

En déduire que $609 \mid 5^{4n} - 2^{4n}$.

CORRECTION :

Développons le membre de droite de l'identité que l'on nous demande de démontrer.

$$(x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k}$$

en effectuant un changement d'indice dans la première somme. Mais les deux sommes sont identiques, à

$$\begin{aligned} \text{deux termes près, et on a donc } (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} &= \sum_{k=1}^n x^k y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ &= x^n y^{n-n} - x^0 y^{n-0} \\ &= x^n - y^n \end{aligned}$$

Le fait que $609 \mid 5^{4n} - 2^{4n}$ est alors une application immédiate de cette identité à $x = 5^4$ et $y = 2^4$, puisque dans ce cas $x - y = 609$.

EXERCICE 4:

Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n-17$.

CORRECTION :

Puisque $n-4$ divise $3n-17$ et que $n-4$ divise $n-4$, $n-4$ divise également $3n-17-3(n-4) = -5$. Or les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de -5 sont $-5, -1, 1, 5$.

Les valeurs possibles de $n-4$ sont donc ces valeurs, et donc on a $n \in \{-1, 3, 5, 9\}$.

Réciproquement, si $n = -1$, alors $n-4 = -5$ divise $3n-17 = -20$.

Si $n = 3$, $n-4 = -1$ divise $3n-17 = -8$.

Si $n = 5$, $n-4 = 1$ divise $3n-17 = -2$.

Si $n = 9$, $n-4 = 5$ divise $3n-17 = 10$.

En conclusion, les valeurs de n qui conviennent sont $-1, 3, 5$ et 9 .

EXERCICE 5:

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

CORRECTION :

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$: " $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7". Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vérifiée.

Initialisation : On a $3^1 + 2^2 = 7$ qui est bien divisible par 7.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie ; et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Alors, on écrit :

$$3^{2n+1} + 2^{4n+2} \equiv 0[7] \text{ (hypothèse de récurrence)}$$

$$\text{On a : } 3^{2(n+1)+1} + 2^{4(n+1)+2} \equiv 3^{2n+3} + 2^{4n+6} [7]$$

$$\begin{aligned}
&\equiv 3^2 \times 3^{2n+1} + 2^4 \times 2^{4n+2} [7] \\
&\equiv 9 \times 3^{2n+1} + 16 \times 2^{4n+2} [7] \\
&\equiv 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{4n+2} [7] \\
&\equiv 2 \times (3^{2n+1} + 2^{4n+2}) [7] \\
&\equiv 0 [7]
\end{aligned}$$

Ainsi, 7 divise $3^{2(n+1)+1} + 2^{4(n+1)+2}$ et donc $P(n+1)$ est vérifiée.

En conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 6:

On cherche à trouver les solutions modulo n de l'équation $ax \equiv b [n]$, où a, b, c sont trois entiers naturels (supérieurs ou égaux à 1). On note $d = a \wedge n$.

Justifier que l'équation admet une solution si et seulement si d divise b .

Dans cette question, on suppose que d divise b . On note x_0 une solution et on pose $n = dn'$.

Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation est $\{x_0 + qn'; q \in \mathbb{Z}\}$.

En déduire que l'équation admet exactement d solutions modulo n .

CORRECTION :

S'il existe une solution x , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $ax = b + kn$. Mais, puisque $d \mid a$ et $d \mid n$, alors $d \mid b$. Réciproquement, supposons que $d \mid b$. Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que : $au + nv = d$.

Écrivons $b = db'$ et multiplions l'égalité de Bézout par b' .

On obtient : $a(ub') + n(vb') = db' = b$

Ainsi, $x = ub'$ est solution de l'équation.

■ Si x est solution, alors : $a(x - x_0) \equiv 0 [n]$ et donc : $n \mid a(x - x_0)$.

Notons également $a = da'$ et $n = dn'$ avec $n' \wedge a' = 1$.

Alors on a $n' \mid a'(x - x_0)$. Puisque $n' \wedge a' = 1$, on en déduit que $n' \mid (x - x_0)$ et donc que $x = x_0 + qn'$, $q \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $x = x_0 + qn'$, alors $ax \equiv b + qa'dn' [n]$ et $n \mid qa'dn'$.

■ On remarque que

$$\begin{aligned}
x_0 + qn' \equiv x_0 + rn' [n] &\Leftrightarrow (q - r)n' \equiv 0 [n] \\
&\Leftrightarrow n \mid (q - r)n' \\
&\Leftrightarrow d \mid (q - r)
\end{aligned}$$

Ainsi, les entiers $x_0, x_0 + n', \dots, x_0 + (d - 1)n'$ sont tous différents modulo n , et tous les entiers $x_0 + qn'$ sont congrus, modulo n , à exactement un de ces entiers. On en déduit bien que l'équation admet exactement d solutions modulo n .

EXERCICE 7:

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$.

1) Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux derniers chiffres de (u_n) ?

2) En déduire que pour tout entier naturel k , on a $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $2u_n \equiv 28[100]$.

3) Valider la conjecture émise à la première question.

CORRECTION :

1) En utilisant un tableur, on peut conjecturer que les deux derniers chiffres de u_n sont 14 si n est pair et 64 si n est impair.

$$\begin{aligned}\text{On a : } u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6 \\ &= 5(5u_n - 6) - 6 \\ &= 25u_n - 36\end{aligned}$$

2) Écrivons cette égalité modulo 4. On trouve : $u_{n+2} \equiv u_n [4]$

puisque $25 \equiv 1[4]$ et $-36 \equiv 0[4]$. Le reste de la question se déduit par une récurrence assez élémentaire.

a) On va prouver ce résultat par récurrence sur n . La propriété est vraie au rang 0. Si elle est vérifiée au rang n , alors

$$\begin{aligned}2u_{n+1} &= 2(5u_n - 6) \\ &= 5(5^{n+2} + 3) - 12 \\ &= 5^{n+3} + 3\end{aligned}$$

On aurait pu aussi utiliser la forme générale du terme d'une suite géométrique.

b) On commence par remarquer que, pour tout $p \geq 1$, alors $5^p = 25[100]$. C'est en effet vrai pour $p = 1$, et si c'est vrai au rang p , alors

$$\begin{aligned}5^p &\equiv 25[100] \Leftrightarrow 5^{p+1} \equiv 125[100] \\ &\equiv 25[100]\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}2u_n &\equiv 5^{n+2} + 3[100] \\ &\equiv 25 + 3[100] \\ &\equiv 28[100].\end{aligned}$$

3) D'après la question précédente, on sait que pour tout entier naturel k , on a : $2u_{2k} = 28 + 100p$ soit $u_{2k} = 14 + 50p$.

Si $p = 2m$ est pair, alors $u_{2k} = 14 + 100m$ et $u_{2k} \equiv 14[100]$.

$$u_{2k} = 14 + 50 + 100m = 64 + 100m$$

Si $p = 2m + 1$ est impair, alors $u_{2k} = (8 + 25m) \times 4$

$$\Rightarrow u_{2k} \equiv 0[4]$$

et ceci contredit le résultat de la question 2. Ce n'est donc pas possible et on a bien $u_{2k} \equiv 14[100]$.

Pour les termes u_{2k+1} , la preuve de la conjecture est identique.