Exercice 1 :

On donne θ_0 un réel tel que : $\cos(\theta_0)=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta_0)=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants (en fonction de θ_0) :

$a=3i(2+i)(4+2i)(1+i)$ et $b=\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$

Correction exercice1

■ $|a|=|3i(2+i)(4+2i)(1+i)|=|3i|\times|2+i|\times|4+2i|\times|1+i|$

$= 3\times\sqrt{2^2+1^2}\times2\times\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{1^2+1^2}$

$=6\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^2\times\sqrt{2}=6\times5\sqrt{2}$

$=30\sqrt{2}$

■ $Arg(a)\equiv Arg(3i(2+i)(4+2i)(1+i))[2\pi]$

$\equiv Arg(3i)+Arg((2+i))+Arg((4+2i))+Arg((1+i))[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}+Arg((2+i))+Arg((4+2i))+\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Soit θ un argument de $(2+i)$, $\cos(\theta)=\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

donc $\cos(\theta)=\cos(\theta_0)$ $\sin(\theta)=\sin(\theta_0)$, on en déduit que $\theta=\theta_0+2k\pi$.

Par suite $Arg(a)\equiv\frac{3\pi}{4}+\theta_0[2\pi]$

■ $|b|=\left|\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}\right|$

$=\frac{|(4+2i)(-1+i)|}{|(2-i)3i|}$

$=\frac{|4+2i|\times|-1+i|}{|2-i|\times|3i|}$

$=\frac{\sqrt{4^2+2^2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\times\sqrt{3^2}}$

$=\frac{\sqrt{20}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times3}$

$=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times3}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

■ $Arg(b) \equiv Arg\left(\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}\right)[2\pi]$

$\equiv Arg\left((4+2i)(-1+i)\right) - Arg\left((2-i)3i\right)[2\pi]$

$\equiv Arg(4+2i) + Arg(-1+i) - Arg(2-i) - Arg(3i)[2\pi]$

$\equiv \theta_0 + \frac{3\pi}{4} - (-\theta_0) - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + 2\theta_0[2\pi]$

Exercice 2 :

Mettre sous la forme $a+ib$; $a;b \in \mathbb{R}$ *(forme algébrique) les nombres complexes suivants :*

■ $z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}$ ■ $z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$ ■ $z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$ ■ $z_4 = \frac{5+2i}{1-2i}$

■ $z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ■ $z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ ■ $z_7 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$ ■ $z_8 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}$ ■ $z_9 = \frac{1+2i}{1-2i}$

Correction exercice 2:

■ $z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3-4i)}{3^2+(-4)^2} = \frac{9+12i+18i-24}{25} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.$

■ $z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{2^2+(-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{2+2i+i-1}{5}\right)^2 = \frac{(1+3i)^2}{25} = \frac{1+6i-9}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$

■ $z_4 = \frac{5+2i}{1-2i} = \frac{(5+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{5+2i+10i-4}{5} = \frac{1+12i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{12}{5}i$

■ $z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$= -\frac{1}{8} + \frac{3}{4}\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i$

$= 1$

Autre méthode :

$z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)$

$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right)$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2$$ *(on rappelle que : $z\overline{z}=|z|^2$)*

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$$

■ $z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7(1+i)^2=\left(\frac{-i^2+i}{1-i}\right)^7(1+2i-1)=\left(\frac{(1-i)i}{1-i}\right)^7(1+2i-1)$

$$=(i)^7(2i)=\left((i)^2\right)^3\times i\times(2i)=-i\times(2i)=2$$

De même on calcul les autres complexes ; je vous laisse le soin de le faire .

<u>Exercice 3 :</u>

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

■ $z_1=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ■ $z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ ■ $z_3=3e^{-\frac{7i\pi}{8}}$ ■ $z_4=\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$

■ $z_5=\frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$ ■ $z_6=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$ ■ $z_7=\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}$

■ z_8 *: le nombre de module 2 et d'argument* $\frac{\pi}{3}$.

■ z_9 *: le nombre de module 3 et d'argument* $-\frac{\pi}{8}$.

<u>Correction exercice 3:</u>

■ $z_1=2e^{\frac{2i\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=-1+i\sqrt{3}$$

■ $z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$$=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}+i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$$

Or $\cos\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

Et $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{8}}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$Donc\ z_2=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}+i\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$$

■ $$z_3=3e^{-\frac{7i\pi}{8}}=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$
$$=3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)-i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$
$$=3\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)-i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$
$$=3\left(-\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$
$$=3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$
$$=-\frac{3\times\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{3\times\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$$

■ $$z_4=\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$$
$$=2e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{3\pi}{4}}$$
$$=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=-2i$$

■ $$z_5=\frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$$
$$=2e^{\frac{i\pi}{4}}\times e^{\frac{3i\pi}{4}}$$
$$=2e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{3i\pi}{4}}$$
$$=2e^{i\pi}$$
$$=-2$$

■ $$z_6=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$$
$$=2\times3e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{5\pi}{6}}$$
$$=6e^{i\frac{7\pi}{6}}$$
$$=6e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$=6e^{i\pi}\times e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$=-6\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -6\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\times\frac{1}{2}i$$
$$= -3\sqrt{3} - 3i$$

■ $z_7 = \dfrac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}$

$$= \frac{2}{3}e^{\frac{i\pi}{3}} \times e^{\frac{5i\pi}{6}}$$
$$= \frac{2}{3}e^{\frac{i\pi}{3}+\frac{i5\pi}{6}}$$
$$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}i$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$$

■ z_8 *: le nombre de module 2 et d'argument* $\frac{\pi}{3}$ *; donc :* $z_8 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

■ z_9 *: le nombre de module 3 et d'argument* $-\frac{\pi}{8}$ *; donc :*

$$z_9 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{4+2\sqrt{2}} - i\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$