Exercice 1

Soit a un complexe de module $|a|<1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que : $1-\overline{a}z \neq 0$;
$$1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\overline{a}z\right|^2} .$$
2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1$.

Correction Exercice 1

1. Il suffit de développer les modules au carré. Précisément, on a :
$$1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2=\frac{\left|1-\overline{a}z\right|^2-|z-a|^2}{\left|1-\overline{a}z\right|^2}$$
$$=\frac{1-\cancel{\overline{a}z}-\cancel{a\overline{z}}-|a|^2|z|^2-|z|^2-|a|^2+\cancel{\overline{a}z}+\cancel{a\overline{z}}}{\left|1-\overline{a}z\right|^2}$$
$$=\frac{1-|a|^2|z|^2-|z|^2-|a|^2}{\left|1-\overline{a}z\right|^2}$$
$$=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\overline{a}z\right|^2}$$
2. On commence par remarquer que : $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 \leq 1$.

   Ensuite, on a d'après la question précédente $1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\overline{a}z\right|^2}$.

   Ainsi, on a l'équivalence : $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\overline{a}z\right|^2} \geq 0$.

   Or, $1-|a|^2 \geq 0$ et $\left|1-\overline{a}z\right|^2 \geq 0$. On a donc la propriété voulue si et seulement si $1-|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow |z| \leq 1$

   Donc l'ensemble des complexes z qui vérifient $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1$ est l'ensemble des affixes des points M du plan complexes appartenants au disque de rayon $R=1$

Exercice 2

Déterminer les racines carrées de $Z=\sqrt{3}+i$ *sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.*

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction Exercice 2

Soit $w=a+ib$ *tel que* $w^2=Z$ *. On obtient le système* $\begin{cases} a^2-b^2=\sqrt{3} \\ 2ab=1 \\ a^2+b^2=|3+i|=2 \end{cases}$.

Il vient $a^2=\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ *et* $b^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ *. Puisque a et b ont le même signe, les solutions sont donc*

$w=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-2}{2}}$ *et* $w=-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-2}{2}}$.

Pour la résolution sous forme trigonométrique, on remarque que $Z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Les racines carrées de Z sont donc $w=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ *et* $w=-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Comme les deux calculs donnent le même résultat, en identifiant les parties réelles, on trouve :

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$,

d'où on tire : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 3

On cherche à résoudre l'équation $(E): z^3+(1+i)z^2+(i-1)z-i=0$.

1. *Rechercher une solution imaginaire pure* ai *à l'équation* (E).
2. *Déterminer* $b;c\in\mathbb{R}$ *tels que :* $z^3+(1+i)z^2+(i-1)z-i=(z-ai)(z^2+bz+c)$.
3. *En déduire toutes les solutions de l'équation* (E).
4. *Sur le même modèle, résoudre l'équation* $(E'): z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i=0$

Correction Exercice 3

1. ai *est solution de l'équation* (E) *si et seulement si :*

   $-i+(i-1)ai-(1+i)a^2-ia^3=(-a-a^2)+i(-1-a-a^2-a^3)=0$.

   La partie réelle et la partie imaginaire du complexe doivent être nuls, et donc ai est solution de l'équation si et seulement si $\begin{cases} a+a^2=0 \\ 1+a+a^2+a^3=0 \end{cases}$.

   La première équation donne $a=0$ *ou* $a=-1$, *et seul* -1 *convient pour la deuxième équation.*

   Donc $-i$ *est solution de l'équation.*
2. *On cherche b,c tels que ;* $z^3+(1+i)z^2+(i-1)z-i=(z-ai)(z^2+bz+c)$

Pour cela, on développe le second membre et on trouve
$(z+i)(z^2+bz+c)=z^3+(b+i)z^2+(ib+c)z+ic$.

Par identification, on doit avoir $\begin{cases} b+i=1+i \\ ib+c=i-1 \\ ic=-i \end{cases}$

On trouve $b=1$ *et* $c=-1$ *; donc la factorisation :* $z^3+(1+i)z^2+(i-1)z-i=(z+i)(z^2+z-1)$.

3. z *est solution de l'équation si et seulement si* $z=-i$ *ou* $z^2+z-1=0$.

   Les racines de cette équation sont $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *et* $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. *L'équation admet donc trois solutions, qui sont* $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *;* $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $-i$.

4. *On trouve que les solutions sont* i , $1+i$ *et* $1-i$.