

PROBLÈME (17 points)

Partie 1:

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$.

- 1 pts** 1) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 1 pts** 2) Etudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation.
- 0,75 pts** 3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; +\infty[$
- 1 pts** b) Montrer que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; puis déterminons un encadrement de α de longueur 125×10^{-3}
- 0,75 pts** 4) Déduire le signe de $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 0,75 pts** 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement ce résultat.
- 1 pts** 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 0,75 pts** b) Etudier la position relative de (C_f) et l'asymptote oblique.
- 1,25 pts** 3) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[): f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$; puis dresser le tableau de variation de f .
- 0,5 pts** 4) Soit h la restriction de f à $I = [\alpha; +\infty[$
- 0,5 pts** a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- 0,75 pts** b) Montrer que h^{-1} est dérivable en e puis calculer $(h^{-1})'(e)$.
- 0,5 pts** 5) a) Vérifier que : $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$
- 1,5 pts** b) Tracer dans le même repère les courbes (C_f) et $(C_{h^{-1}})$. (On prend $\alpha \approx 1,2$)

Partie 3 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = e^2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = f(U_n)$.

- 0,75 pts** 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n$.

0,75 pts 2) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .

1,25 pts 3) En déduire que la suite (U_n) est convergente puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

0,75 pts 4) Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par : $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(U_k) - 1}{U_k}$

Partie 4 :

Soit F la fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et vérifiant $F(1) = \frac{1}{2}$.

1 pts 1) Déterminer $F(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

1 pts 2) Montrer que : $F(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}(3 - \alpha^2)$