EXERCICE 1:

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$. *Soit* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Partie A

1. a) Donner le tableau de variation de f.

   b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

   c) Etudier la position relative de (D) et (C).

   d) Construire dans le même repère (D) et (C).

2. a) Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ vers $[\ln 2;+\infty[$.

   b) Construire la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

3. a) Montrer que : $\left(\forall t\in[0;+\infty[\right)$; $1-t\le\dfrac{1}{1+t}\le 1$.

   b) En déduire que : $\left(\forall x\in[0;+\infty[\right)$; $x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$.

   c) En déduire un encadrement de $\ln\left(1+e^{-2t}\right)$ pour tout $t\in[0;+\infty[$.

4. Pour tout $n\in IN^*$ on note S_n la surface géométrique du domaine limité par (C), (D) et les droites d'équations respectives : $x=0$ et $x=n$.

   a) Montrer que $\left(\forall n\in IN^*\right)$; $\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}e^{-2n}+\dfrac{1}{8}e^{-4n}\le S_n\le\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2n}$.

   b) Montrer que la suite numérique $(S_n)_{n\ge1}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite l

Partie B

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge0}$ définie par : $\begin{cases} u_0=\int_0^{\ln 2}1dt=\ln 2\\ u_n=\int_0^{\ln 2}\left(f'(t)\right)^n dt \qquad (\forall n\in IN)\end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_1$

2. a) Montrer que : $\left(\forall x\in[0;\ln 2]\right)$; $0\le f'(x)\le\dfrac{3}{5}$.

   b) En déduire que : $(\forall n\in IN)$; $0\le u_n\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\ln 2$

   c) Calculer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_1$.

3. a) Montrer que : $\left(\forall x\in[0;+\infty[\right)$; $1-f''(x)=\left(f'(x)\right)^2$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n tel que : $n\ge 2$ on a : $u_n=u_{n-2}-\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$.

   c) En déduire que : $\left(\forall n\in IN^*\right)$; $\begin{cases} u_{2n}=u_0-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2k-1}\\ u_{2n+1}=u_1-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2k}\end{cases}$

4. Pour tout $n \in IN^*$ on pose : $V_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k$.

Montrer que $(V_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 2:

Partie A : *question de cours*

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a;+\infty[$.

Compléter la phrase suivante : On dit que : « f admet une limite finie en $+\infty$ *si……. »*

2. Démontrer le théorème « des gendarmes »

soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a;+\infty[$ *et un nombre réel. Si g et h ont pour limite commun quand x tend vers* $+\infty$*, et si pour tout x assez grand* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *, alors la limite de f quand x tend vers* $+\infty$ *est égale à* $+\infty$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = e^x - x - 1$ *et soit* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.*

La droite (D) *d'équation* $y = -x - 1$ *est asymptote à* (C).

On a représenté ci-dessous la courbe (C) *et la droite* (D).

1. Soit a un nombre réel ; écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) *à* (C) *au point M d'abscisse a.*

2. Cette tangente (T) *coupe la droite* (D) *au point N d'abscisse b ; qui Vérifier que* $b - a = -1$

3. En déduire une construction, à effectuer sur la figure ci-dessous, de la tangente (T) *à* (C) *au point M d'abscisse* $1,5$ *. On fera apparaître le point N correspondant.*

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f.

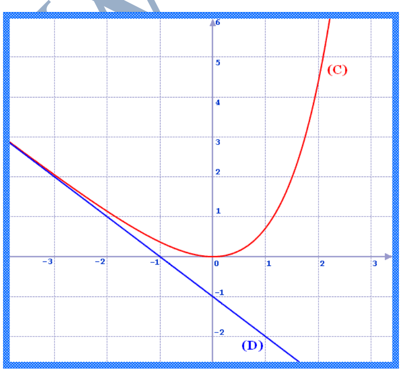
2. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, les inégalités suivantes $(1): e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$ *et*

$(2): e^{\frac{1}{n+1}} \geq 1 + \frac{1}{n+1}$

3. En utilisant l'inégalité (1) *, démontrer que pour tout entier naturel non nul n:* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

4. En utilisant l'inégalité (2)*, démontrer que pour tout entier naturel non nul n :* $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *puis sa limite.*



EXERCICE 3:

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1} & si\ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b. Etablir que, pour tout nombre réel x non nul, on a : $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. Donner, sans démontrer, la limite suivante: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}$ et démontrer que f est continue en 0.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a: $e^x \geq x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x=0$.

   b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(e^x-1)^2}$

   c. Donner le tableau des variations de f.

4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ de la courbe (C_f)

   a. Etablir que $f(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}$; puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

   b. On admet que la fonction f est dérivable en 0.
   Que suggère alors le résultat précèdent?

EXERCICE 4

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=e^x-x-1$

1. Etudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de r.
3. En déduire que pour tout x de $[0;+\infty[$, $e^x-x>0$.

Parte B

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

On admet que f est strictement croissante sur $[0;1]$

1. Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x)\in[0;1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y=x$

   a. Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$

   b. Etudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) de la fonction f sur $[0;1]$

3. a. Déterminer une primitive de f sur $[0;1]$

   b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) *définie par:* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$

1. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4

2. Montrer que pour tout entier naturel n ; $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

3. En déduire que la suite (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

EXERCICE 5:

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$

On note (C_f) *sa courbe représentative dans le plan rapport au repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(l'unité est 2 cm)*

Partie I

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = e^x - x - 1$

1. Etudier les variations de la fonction g sur R. En déduire le signe de g.

2. Justifier que pour tout x , $(e^x - x)$ *est strictement positif.*

Partie II

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ *et en* $-\infty$

b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a. Calculer $f'(x)$ *la fonction dérivée de f.*

b. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.

3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) *à la courbe* (C_f) *au point d'abscisse 0.*

b. A l'aide de la partie I, étudier la position relative de la courbe (C_f) *et la droite* (T).

4. Tracer la droite (T) *; les asymptotes et la courbe* (C_f) *dans le repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.