Exercice 1: (4 Pts)

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = e^{\pi}+1 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+2e^{\pi})u_n - e^{2\pi}}{u_n+1} \end{cases} \quad ;\forall n \in IN$

1) Montrer que : $\forall n \in IN; U_n \geq e^{\pi}$.

2) a- Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est décroissante.

b- Déduire que : $e^{\pi} \leq U_n \leq e^{\pi}+1 \;;\forall n \in IN$.

c- Décrire que $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente.

3) On considère la suite définie par : $\forall n \in IN \;;\; V_n = \dfrac{1}{U_n - e^{\pi}}$.

a- Montrer que: $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique de raison : $r = \dfrac{1}{e^{\pi}+1}$.

b- Déterminer: V_n et U_n en fonction de n.

c- Vérifier: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^{\pi}$.

4) On pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k$ et $T_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} e^{(V_k-1)(e^{\pi}+1)}$

a- Déterminer S_n et T_n en fonction de n.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice 2: (5 Pts)

Partie I

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ (E_1) : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ (E_2) : $\left(-i\bar{z}+\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{3}\left(-i\bar{z}+\sqrt{3}\right)+1=0$.

3) Mettre les solutions de (E_1) sous la forme exponentielle avec $(Im(z_1)>0)$.

4) On pose : $U = z_1 + iz_2$

a- Mettre U sous la forme algébrique.

b- Montrer que : $U = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$; puis déduire : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

c- Montrer que : $\left(\dfrac{U}{|U|}\right)^{2024} = 1$.

Partie II

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points : $A(1+i)$; $B(1-i)$; $C(2-2i)$.

1) a- Montrer que: les points A ; B et C appartient au cercle du centre $I(3)$ et du rayon :

$r = \sqrt{5}$.

b- Déduire la nature du triangle ACI

2) Soit $E(e)$ l'image de O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IC}$ déterminer e.

3) Soit $D(d)$ l'image de $E(e)$ par la relation de centre O est d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer d puis montrer que $(AB) \perp (CD)$.

<u>EXERCICE 3</u> (3 pts)

On considère dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{J};\vec{k})$ les points;

$\Omega(-1;1;2)$; $A(2;2;4)$; $B(6;1;3)$ et $C(-4;4;5)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; puis montrer que;
$x + 2y + 2z - 14 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S) la sphère de centre est tangente au plan (ABC)

a) Calculer la distance $d(\Omega;(ABC))$

b) Montrer que; $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S)

c) Montrer que le triplet de coordonnées de H point de contact de la sphère (S) et le plan (ABC) Est: $(0;3;4)$

d) Montrer que la droite (H) coupe la sphère (S) en deux points, à déterminer

<u>EXERCICE 4</u> (3 pts)

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher, trois boules rouges portent les numéros : 1 ; 1 ; 2 et une boule verte porte le numéro: 2, on tire de l'urne deux boules successivement et avec remise.

1) On considère les deux événements suivants:

A "les boules tirées sont de même couleur"

B " le produit des nombres portés par les deux boules tirées est pair "

a) Montrer que: $p(A) = \frac{5}{8}$ et que $p(B) = \frac{3}{4}$

b) Sachant que les deux boules tirées sont de la même couleur quelle est la probabilité pour qu'elles portent des nombres ayant un produit pair.

2) Soit X la variable aléatoire qui lie chaque tirage des deux boules par le nombre des boules vertes tirées ; donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique

Problème: (11 Pts)

Partie I

On note (Cg) la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$g(x)=ln(x^2+1)+1$

1) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ Interpréter le résultat graphiquement.

2) Etudier la dérivabilité de g à droite en $x_0=0$, puis Interpréter le résultat graphiquement.

3) Calculer g'(x) pour tout $x\in]0;+\infty[$; puis Tracer le tableau de variation de g.

4) Etudier la concavité de g.

Partie II

Soit f définie la fonction par : $f(x)=ln\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)+1$

On note C_f la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a- Déterminer D_f.

b- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu graphiquement.

2) Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$, puis interpréter le résultat obtenu graphiquement.

3) a- Montrer que : $\forall x>0; f'(x)=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

b- Tracer le tableau de variation de f.

4) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point $A(1;1)$.

Partie III

On considère la fonction h définie sur IR^{+*} par: $h(x)=g(x)-f(x)$.

1) a- Vérifier que : $h(x)=ln(x)-ln(2)$; $\forall x\in]0;+\infty[$.

b- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

c- Déduire $\exists!\alpha\in]0;+\infty[$ tel que: $g(\alpha)=f(\alpha)$, et que : $\alpha\in]e^{-1};1[$

d- Vérifier que : $\alpha=\frac{1}{2}$, puis étudier la position relative de C_f et C_g.

2) Construire C_f et C_g dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

3) a- Calculer : $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} h(x)dx$.

b- Déduire l'aire A de la partie délimitée par C_f ; C_g et le droites d'équations $x=\frac{1}{2}$

et $x=\dfrac{e}{2}$.

Partie IV

On considère la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ définie par : $\begin{cases} U_1 = e \\ U_{n+1} = f(U_n) \qquad ;\forall n \in IN^* \end{cases}$.

1) Montrer que : $\forall n \in IN^* ; U_n \geq 1$

2) On admet que : $\forall x > 1 \ ; f(x) < x$; montrer que $(U_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante.

3) Justifier que $(U_n)_{n\in IN^*}$ est convergente, puis déterminer sa limite.