



guessmaths

## Série n° 7 d'exercices « Ensemble et applications »

### Exercice 1.

a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe des entiers naturels (dépendant de  $n$ )  $u_n$  et  $v_n$  tels que :

$$(1 + \sqrt{2})^n = u_n + v_n \sqrt{2} \text{ Donner } u_{n+1} \text{ et } v_{n+1} \text{ en fonction de } u_n \text{ et } v_n .$$

b) Montrer alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $u_n^2 - 2v_n^2 = (-1)^n$ .

### Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer  $f(I)$  puis vérifier que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$  puis préciser  $f^{-1}$ .

$$1) f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad I = ]-\infty; 2] .$$

$$2) f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \quad I = ]-2; +\infty[ .$$

$$3) f(x) = \sqrt{2x+3} - 1 \quad I = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[ .$$

$$4) f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad I = \mathbb{R}$$

### Exercice 3

Soient  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$  et  $g$  une application de  $F$  vers un ensemble  $G$ .

Montrer que :  $(g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective})$  et  $(g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective})$ .

### Exercice 4

$A$  et  $B$  sont des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

$$1. (A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset) .$$

$$2. (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) .$$

$$3. A \Delta B = B \Delta A .$$

$$4. (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) .$$

$$5. A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B .$$

$$6. A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B .$$