Exercice 1: (12 Pts)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=\frac{-2e^x}{1+e^x}+nx$$

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

Partie I :

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-nx+2)$; puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que: la courbe (C_n) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation caractéristique.

2- a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f_n'(x)=\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}+n$

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\frac{4e^x}{(1+e^x)^2}\le 1$

c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$

(On distinguera les deux cas : $n=0$ et $n\ge 1$)

3- a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0

b) Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n)

4- Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes (C_0) et (C_2).

5- Pour tout réel $t>0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par (C_n) et les droites d'équations respectives : $y=nx-2$; $x=0$ et $x=t$

a) Calculer $A(t)$ pour tout $t>0$

b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)$

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n\ge 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f_0(u_n) \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1- a) Montrer que l'équation f0(x)=x admet une unique solution α dans R

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\left|f_0'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$

2- a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|$

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\alpha\right|$

c) Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ converge vers α

Partie III :

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$

1- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$ (On prendra $\frac{e}{1+e} < 1,47$)

2- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $f_{n+1}\left(x_n\right) > 0$

b) En déduire que la suite $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

c) Montrer que la suite $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$ est convergente.

3- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$; $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$

4- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \leq x_2$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(x_n\right)^n$

Exercice 2: (4 Pts)

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a + b \neq c$

1- a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E) : z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$$

b) On suppose dans cette question que : $a = i$; $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignes.

Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A et $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$

a) Montrer que : $2p = b + a + (a-b)i$ et $2q = c + a + (c-a)i$

b) Calculer : $\dfrac{p-d}{q-d}$

c) En déduire la nature du triangle PDQ

3- Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$

a) Montrer que l'affixe de K est $k = a + \dfrac{i}{2}(c-b)$

b) Montrer que les points K, P, Q et D sont cocycliques.

<u>Exercice 3:</u> (4 Pts)

Partie I :

On considère dans Z×Z l'équation $(E): 47x - 43y = 1$

I- Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation (E)

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. l'équation (E)

Partie II :

On considère dans $\mathbb{Z}$ L'équation $(F): x^{41} \equiv 4[43]$

1-Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F)

a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que: $x^{42} \equiv 1[43]$

b) Montrer que : $4x \equiv 1[43]$; en déduire que : $x \equiv 11[43]$

2- Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F)

Partie III :

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant : $(S): \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases}$

1- Soit x une solution du système (S)

a) Montrer que x est solution du système : $(S'): \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases}$

b) En déduire que : $x \equiv 527[2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

2- Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S)