EXAMEN BLANC N° 5 *2éme Bac PC- SVT*

Exercice 1

On considère la Suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{-5+7u_n}{-1+3u_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1. Vérifier que : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4(u_n - 1)}{2+3(u_n-1)}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et montrer par récurrence que :* $u_n > 1$ *pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit (v_n) *la suite numérique définie par :* $v_n = \dfrac{2}{1-u_n} + 3$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *et en déduire* $v_n = 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $u_n = \dfrac{-5+v_n}{-3+v_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et écrire* u_n *en fonction de n.*

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

Un sac Contient 10 balles : 3 balles rouges ; 3 balles vertes et 4 balles noires (les balles sont indiscernables au toucher).
On tire dans le sac successivement et sans remise 3 balles.
1. On considère les évènements suivants :
A «Les trois balles tirées sont de même couleur »
B « Les trois balles tirées sont de même couleur vertes ou bien de même couleur rouges »
Montrer que: $P(A) = \dfrac{1}{20}$ *et* $P(B) = \dfrac{1}{60}$.

2. Soit X la variable aléatoire qui associe tout tirage au nombre des balles noires restant dans le sac après le tirage.

a. Montrer que les valeurs qui peuvent être prises par la variable aléatoire X sont $\{1;2;3;4\}$

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 3

Dans l'espace est muni d'un repère Orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *, on considère les points suivants :* $A(1;0;1)$; $B(0;0;2)$; $C(-1;2;1)$ *et* $D(1;1;1)$ *Soient* (L) *la droite passant par D et perpendiculaire au plan* (ABC) *et la sphère* (S) *d'équation :* $x^2+y^2+z^2+4x+y+z+3=0$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

b. En déduire que $x+y+z-2=0$ *est une équation du plan* (ABC).

c. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (L).

d. Calculer $\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\|$.

2. a. Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).

b. Montrer que l'équation de (S) *s'écrit comme suit :* $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2x-y-z=0$

c. En déduire que la droite (L) est tangente à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

3. On considère le vecteur $\vec{v}(1;1;-2)$ et (P) le plan perpendiculaire au plan (ABC) et passant par B.

a. Montrer que : $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\vec{v} = 0$

b. En déduire que $x + y - 2z + 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P)

c. Montrer que (P) coupe (S) Selon un cercle dont on déterminera son centre et son rayon.

Exercice 4

On considère les nombres Complexes suivants : $a = 3 + i$; $b = 8 + 2i$; $c = 6 + 4i$ et $d = 1 + 3i$
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives a ; b ; c et d.

1. a. Montrer que : $i \times d = -\bar{a}$.

b. En déduire que: $\arg(ad) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

c. Montrer que a et $-i \times d$ sont les solutions de l'équation $z^2 - 6z + 10 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes

2. a. Montrer que C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

b. Montrer que le triangle DAC est rectangle en A

3. a. Ecrire les nombres complexes $c - a$ et $d - a$ sous forme trigonométrique

b. En déduire que: $\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et Montrer que: $(c-b)(c-a) = 12e^{i\frac{\pi}{2}}$.

4. Soient D' limage de D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et B' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Montrer que D et B sont symétriques par rapport au milieu du segment $[AC]$

Problème

A / On considère la fonction f définie par : $f(x) = (1-x)e^x + (1+x)e^{-x}$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. a. Montrer que: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ (On rappelle que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b. Montrer que: $f(x) = f(-x)$ pour tout nombre réel x. Interpréter géométriquement le résultat.

2. a. Montrer que: $f'(x) = -x\left(e^x + e^{-x}\right)$ pour tout nombre réel x.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \le 2$.

3. a. Montrer qu'il existe un réel unique α tel que: $f(\alpha) = 0$ et $\alpha > 1$.

b. Montrer que: $e^{2\alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$; en déduire que : $\alpha \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

c. Etudier le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel positif x.

(On pourra utiliser $\ln x \le x - 1$ pour tout nombre réel strictement positif x)

4. a. Tracer la courbe (C)

b. Calculer en cm^2 la surface de la partie du plan délimitée par la courbe (C) et l'axes des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

B / *On considère la fonction g définie sur* $]0;+\infty[$ *par:* $g(x)=x(2-\ln x)+\dfrac{2+\ln x}{x}$

1. a. *Montrer que :* $g(e^x)=e^x(2-x)+(2+x)e^{-x}$ *pour tout nombre réel x.*

   b. *En déduire que :* $g'(e^x)=e^{-x}f(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$.

   c. *En déduire* $g'(x)=\dfrac{1}{x}f(\ln x)$ *que pour tout nombre réel strictement positif x.*

   d. *Montrer que:* $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$.

2. a. *Montrer que:* $g(e^\alpha)=e^\alpha+e^{-\alpha}$

   b. *Dresser le tableau de variation de la fonction g.*

   c. *En déduire que l'équation* $g(x)=0$ *admet deux solutions u et v tels que :* $\ln u<\alpha<\ln v$.