

Exercice 1 (2.5 pts)

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt[n]{(x-1)^{n-1} \operatorname{Arctan}(2^n(x-1))}}{x-1}$,

avec n un entier impair ≥ 3 .

1 pt 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .

1,5 pt 2) Montrer que f admet un prolongement par continuité à droite en 1 ; f à déterminer.

Exercice 2 (6 pts)

Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 5$, considérons la fonction f_n définie sur $[0;1]$

Par : $f_n(x) = n \operatorname{Arctan}(x) - \pi$.

1) Soit n un entier tel que $n \geq 5$.

1 pt a- Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;1]$.

1 pt b- Montrer que $(\exists! x_n \in]0;1[) / f_n(x_n) = 0$.

2) Soit (x_n) la suite ainsi définie.

2 pt a- Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.

1 pt b- Montrer que : $(\forall n \geq 5) x_n = \tan \frac{\pi}{n}$.

1 pt c- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Exercice 3 (9.5 pts)

Considérons la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ par : $f(x) = \sin 2x$.

1) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ vers un intervalle J à déterminer

2) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f .

0,5 pt a- Montrer que f^{-1} est impaire.

0,5 pt b- Donner le tableau de variations de f^{-1} .

1 pt c- Montrer que : $(\forall x \in J) ; \cos(2f^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

0,5 pt 3) a- Calculer $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

1 pt b- Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que : $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) Considérons g la restriction de la fonction $\frac{\sqrt{2}}{2}$ à l'intervalle $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et considérons la

suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = g(u_n)$

1 pt a- Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

1,5 pt b- Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \right) ; g(x) \leq x$.

1 pt c- Montrer que (u_n) est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente

1 pt d- Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 4 (2pts)

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ les deux suites réelles définies par : $u_n = 10^{-n} E\left(\sqrt[3]{210^n}\right)$ et $v_n = u_n + 10^{-n}$

Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes et qu'elles convergent vers $\sqrt[3]{2}$

Corrigé

Exercice 1

$$f(x) = \frac{\sqrt[n]{(x-1)^{n-1} \operatorname{Arctan}(2^n(x-1))}}{x-1}, \text{ avec } n \in \{2k+1 / k \in \mathbb{N}\}$$

1) Détermination de D_f

Soit $x \in \mathbb{R}$, comme n est impair alors $n-1$ est pair, donc $(x-1)^{n-1} \geq 0$.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}(x)$ a le même signe que x , donc, on a :

$$x \in D_f \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(2^n(x-1)) \geq 0 \text{ et } (x-1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2^n(x-1) \geq 0 \text{ et } (x-1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x-1) > 0$$

$$D_f =]1; +\infty[\dots$$

2) Montrons que f admet un prolongement par continuité à droite en 1

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[n]{(x-1)^{n-1} \operatorname{Arctan}(2^n(x-1))}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[n]{\frac{(x-1)^{n-1} \operatorname{Arctan}(2^n(x-1))}{(x-1)^n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[n]{\frac{\operatorname{Arctan}(2^n(x-1))}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[n]{2^n \times \frac{\operatorname{Arctan}(2^n(x-1))}{2^n(x-1)}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[n]{2^n} \times \sqrt[n]{\frac{\text{Arctan}(2^n(x-1))}{2^n(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 \times \sqrt[n]{\frac{\text{Arctan}(2^n(x-1))}{2^n(x-1)}} = 2$$

(Car $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{Arctan}(2^n(x-1))}{2^n(x-1)} = 1$, puisque $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan}(X)}{X} = 1$; en posant $X = 2^n(x-1)$).

Et comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \in \mathbb{R}$ alors la fonction f admet un prolongement par continuité à droite en 1, qui est la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$f : \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[n]{(x-1)^{n-1} \text{Arctan}(2^n(x-1))}}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Exercice 2

$n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 5$.

$(\forall x \in [0;1]) ; f_n(x) = n \text{Arctan}(x) - \pi$

1) a- **Montrons que f_n est strictement croissante sur $[0;1]$**

Comme la fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; et en particulier sur $[0;1]$ et comme $n > 0$ alors la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;1]$.

b- Montrons que $(\exists ! x_n \in]0;1[) / f_n(x_n) = 0$.

On a la fonction Arctan est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0;1]$ alors la fonction f_n est continue sur $[0;1]$ et on a f_n est strictement croissante sur $[0;1]$, et comme $f_n(0) = -\pi < 0$ et

$$f_n(1) = n \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}(n-4) > 0 \text{ (car } n \geq 5)$$

alors $f_n(0) \times f_n(1) < 0$. Et par suite d'après TVI $(\exists ! x_n \in]0;1[) / f_n(x_n) = 0$.

2) a) **Montrons que la suite $(x_n)_{n \geq 5}$ est strictement décroissante**

On a $(\forall n \geq 5) ; f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) = \text{Arctan} x_n > 0$ puisque $(\forall n \geq 5) ; x_n > 0$ et $(\forall x > 0) ; \text{Arctan} x > 0$.

Donc on a : $(\forall n \geq 5) ; f_n(x_n) < f_{n+1}(x_n)$ et comme $(\forall n \geq 5) ; f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ alors on a : $(\forall n \geq 5) ; f_{n+1}(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_n)$.

Et comme f_{n+1} est st. croissante sur $[0;1]$ et x_{n+1} et x_n sont des éléments de $[0;1]$ alors

$(\forall n \geq 5) ; x_{n+1} < x_n$. Et par suite, la suite $(x_n)_{n \geq 5}$ est strictement décroissante. Comme la suite $(x_n)_{n \geq 5}$ est minorée (par 0) alors elle est convergente.

b- **Montrons que $(\forall n \geq 5) ; x_n = \tan \frac{\pi}{n}$.**

Soit $n \geq 5$, on a : $f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow n \text{Arctan} x_n - \pi = 0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arctan} x_n = \frac{\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arctan} x_n = \frac{\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow x_n = \tan \frac{\pi}{n} \quad (\text{car } \forall n \geq 5 ; 0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2})$$

c- **Déterminons** $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Comme $\forall n \geq 5 ; x_n = \tan \frac{\pi}{n}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} = 0$ Et la fonction tangente est continue en

$$0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan \frac{\pi}{n} = 0.$$

Exercice 3

la fonction f est définie sur $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ par : $f(x) = \sin 2x$

1) **Montrons que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ vers un intervalle**

J que nous allons déterminer.

On sait que la fonction : $x \mapsto \sin 2x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est continue et dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ (restriction d'une fonction est continue et dérivable) Et

on a $\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right], f'(x) = 2 \cos 2x \text{ et comme } \left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right], \text{ alors } 2x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \text{ et}\right.$

$\text{comme } \left(\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \cos t > 0 \text{ alors, on a : } \left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right], f'(x) > 0.\right.$

Donc f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.

Et par suite f réalise une bijection de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ vers un l'intervalle

$$\begin{aligned} J &= f\left(\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]\right) \\ &= \left[f\left(-\frac{\pi}{6}\right); f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \end{aligned}$$

2) a- **Montrer que f^{-1} est impaire.**

Remarquons d'abord que la fonction f est impaire (l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ est symétrique

par rapport à 0 et la fonction sinus est impaire) On a : $D_{f^{-1}} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, et comme

$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ est symétrique par rapport à 0 ; alors on a : $\forall x \in D_{f^{-1}}$ on a $-x \in D_{f^{-1}}$.

Il ne reste qu'à montrer que :

$$f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x) .$$

Soit $x \in D_{f^{-1}}$, posons $y = f^{-1}(-x)$. Comme $x \in D_{f^{-1}}$, alors $y \in D_f$. On a :

$$\begin{aligned} y = f^{-1}(-x) &\Leftrightarrow -x = f(y) \\ &\Leftrightarrow x = -f(y) \\ &\Leftrightarrow x = f(-y) \quad (\text{car } f \text{ est impaire}) \\ &\Leftrightarrow -y = f^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow y = -f^{-1}(x) \end{aligned}$$

Et par suite $x \in D_{f^{-1}}$ on a : $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$

D'où f^{-1} est impaire.

b- **Tableau de variations de f^{-1}**

Comme f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ alors f^{-1} est strictement croissante sur

$$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] .$$

D'où le tableau de variations de f^{-1} .

x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f^{-1}(x)$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

c- **Montrons que :** $\left(\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) ; \cos(2f^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Soit $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, on sait que :

$$\begin{aligned} \cos^2(2f^{-1}(x)) &= 1 - \sin^2(2f^{-1}(x)) \\ &= 1 - (f(f^{-1}(x)))^2 \\ &= 1 - (f \circ f^{-1}(x))^2 \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Et comme $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \subset]-1; 1[$ alors $1 - x^2 > 0$, et comme

$2f^{-1}(x) \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \subset \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos(2f^{-1}(x)) > 0$. Et par suite $\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$;

$$\cos(2f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

3) a- Calculons $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$\text{On a : } f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b- Montrons que f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme f est dérivable en $\frac{\pi}{8}$ et $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{et on a : } (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4) a- Montrer que la suite (u_n) est bien définie

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Pour montrer que la suite (u_n) est bien définie, il suffit de montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$

$u_n \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Procédons par récurrence :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et comme $\left(\frac{1}{2} \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$ alors $\left(u_0 \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\left(u_n \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$ et montrons que $\left(u_{n+1} \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$.

On a : l'hypothèse de récurrence $u_n \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, donc $g(u_n) \in g\left(\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$, et comme

$$u_{n+1} = g(u_n) \text{ et } g\left(\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) = \left[g(0); g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \subset \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] ; \text{ alors } u_{n+1} \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

Et par suite, d'après le principe de la récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \left(u_n \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$.

D'où la suite (u_n) est bien définie.

b- **Montrer que :** $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right) ; g(x) \leq x$.

Comme la fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{6} \right]$ et $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6} \right] \right), f'(x) = 2 \cos 2x$ alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f\left(\left[0; \frac{\pi}{6} \right]\right) = \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ et on a :

$$\begin{aligned} \left(\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right) (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2 \cos(2f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

donc g est dérivable sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ et on a : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right) ; g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

Considérons la fonction h définie sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ par : $h(x) = x - g(x)$.

On a h est dérivable sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ (Différence de deux fonctions dérivables) et on a :

$$\left(\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right) ; h'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Et comme } x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} \leq -x^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - x^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{1-x^2} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \geq 0$$

$$\Rightarrow h'(x) \geq 0$$

d'où la fonction h est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ (car $h'(x)$ ne s'annule qu'en $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Donc, on a : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) ; h(x) \geq h(0) = 0$ Et par suite, on a : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) ;$

$$g(x) \leq x$$

c- **Montrer que la suite (u_n) est décroissante.**

On a d'après la question précédente $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) ; g(x) \leq x$ et comme on a :

$\left(u_n \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) ;$ alors on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; g(u_n) \leq u_n$ et comme $u_{n+1} = g(u_n)$ alors on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq u_n.$$

D'où la suite (u_n) est décroissante.

Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 alors elle est convergente.

d- **Prouvons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.**

$$\text{On a : } \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Comme g est continue sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] ; g\left(\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) \subset \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] ; u_0 \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et (u_n) est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est solution de l'équation $g(x) = x$ dans $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ c.à.d de

$$\text{l'équation } h(x) = 0 \text{ dans } \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Et comme 0 est l'unique solution de cette équation sur cet intervalle car h est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et $h(x) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ les deux suites réelles définies par : $u_n = 10^{-n} E\left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n\right)$ et $v_n = u_n + 10^{-n}$.

Montrons que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes et qu'elles convergent vers $\sqrt[3]{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $E\left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n\right) \leq 10^n \cdot \sqrt[3]{2} < E\left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n\right) + 1$, donc

$10E\left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n\right) \leq 10^{n+1} \cdot \sqrt[3]{2} < 10E\left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n\right) + 10$ et comme $10^{n+1}u_{n+1} = E\left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^{n+1}\right)$ alors d'après

la définition de la partie entière on a : $10E\left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n\right) \leq E\left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^{n+1}\right) \quad \boxed{1}$ et

$E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^{n+1}) + 1 \leq 10E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n) + 10$ [2] (En effet , on a pour tout réel x :

$E(x) = \text{Max}\{n \in \mathbb{N} / n \leq x\}$ et $E(x) + 1 = \text{Min}\{n \in \mathbb{N} / n < x\}$.

Donc en multipliant tous les membres des deux inégalités [1] et [2] par $10^{-(n+1)}$, on obtient :

$$10^{-n} E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n) \leq 10^{-(n+1)} E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^{n+1}) \quad [1] \text{ et}$$

$$10^{-(n+1)} E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^{n+1}) + 10^{-(n+1)} \leq 10^{-n} E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n) + 10^{-n} \quad [2] \text{ D'où } u_n \leq u_{n+1} \text{ et } v_{n+1} \leq v_n.$$

Et par suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

$$\begin{aligned} \text{Et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - (u_n + 10^{-n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -10^{-n} = 0 \end{aligned}$$

Alors les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Comme $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n) \leq 10^n \cdot \sqrt[3]{2} < E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n) + 1$ alors on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ;$

$$10^{-n} E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n) \leq \sqrt[3]{2} < 10^{-n} E(\sqrt[3]{2} \cdot 10^n) + 10^{-n} \text{ c.à.d } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq \sqrt[3]{2} < v_n, \text{ et comme}$$

$(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite et si on pose

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l, \text{ alors par passage à la limite dans } u_n \leq \sqrt[3]{2} < v_n, \text{ on obtient : } l \leq \sqrt[3]{2} \leq l$$

$$\text{D'où } l = \sqrt[3]{2}, \text{ et par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt[3]{2}$$