Examen national 2018
session normale — 2éme Bac SM

Exercice 1 : (3,5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x;y)$ de IR^2 on pose $M(x;y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble

$E=\{M(x;y)/(x;y)\in IR^2\}$.

0,25 pt 1. Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

0,25 pt 2. a) Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.

0,5 pt b) On pose $J=M(0;1)$; Démontrer que $(I;J)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$.

0,5 pt 3. a) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 pt b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4. Soit φ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall(x;y)\in IR^2-\{(0;0)\})$;

$$\varphi(x+iy)=M(x+y;-y)=\begin{pmatrix}x+y&-y\\2y&x-y\end{pmatrix}$$

0,5 pt a) Montrer que φ est une morphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 pt b) On pose $E^*=E-\{O\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.

0,25 pt c) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0,25 pt 5. Monter que $(E,+,\times)$ est corps commutatif.

Exercice 2 : (3 points)

Soit p un nombre premier tel que : $p=3+4k$ avec $k\in IN^*$.

0,5 pt 1. Montrer que pour tout entier relatif x, si $x^2\equiv 1[p]$ alors $x^{p-5}\equiv 1[p]$.

2. Soit x un entier relatif x vérifiant $x^{p-5}\equiv 1[p]$.

0,5 pt a) Montrer que x et p sont premier entre eux.

0,5 pt b) Montrer que $x^{p-1}\equiv 1[p]$.

0,5 pt c) Vérifier que $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$.

0,5 pt d) En déduire que $x^2\equiv 1[p]$.

0,5 pt 3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62}\equiv 1[67]$.

Exercice 3 : (3,5 points)

Soit m un nombre complexe.

I. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

(E_m) : $z^2+(im+2)z+im+2-m=0$

0,25 pt 1) a) *Vérifier que* $\Delta=(im-2i)^2$ *est le discriminant de l'équation* (E_m).

0,5 pt b) *Donner, suivant les valeur de m, l'ensemble des solution de l'équation* (E_m).

0,5 pt 2) *Pour* $m=i\sqrt{2}$ *, écrire les deux racines de l'équation* (E_m) *sous la forme exponentielle.*

***II**. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A, Ω *, M et* M' *d'affixes respectifs* $a=-1-i$ *,* $\omega=i$ *, m et* $m'=-im-1+i$.

1) *Soit R la rotation de d'angle* $-\frac{\pi}{2}$ *qui transforme M en* M'.

0,25 pt a) *Vérifier que* Ω *est le centre de R.*

0,5 pt b) *Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que :* $A=R(B)$.

0,5 pt 2) a) *Vérifier que :* $m'-a=\frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$.

0,5 pt b) *En déduire que les points A, M et* M' *sont alignés si et seulement si les points A, B,* Ω *et M sont cocycliques.*

0,5 pt c) *Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M et* M' *soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.*

Exercice 4 : *(7 points)*

Partie I :

0,5 pt 1) a) *Montrer que :* $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt=x-\ln(1+x)$

0,5 pt b) *En utilisant le changement de variable* $u=t^2$ *, montrer que :* $(\forall x\in]0;+\infty[)$

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$$

0,5 pt c) *En déduire que :* $(\forall x\in]0;+\infty[)$ $\frac{1}{2(1+x)}\le\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\le\frac{1}{2}$

0,25 pt 2) *Déterminer :* $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ *par :*

$$\begin{cases} f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) & ;\ x\neq0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

Et soit (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,25 pt 1) a) *Montrer que f est continue à droite en 0.*

0,5 pt b) *Montrer que f est dérivable à droite en 0 (On pourra utiliser le résultat de la question I-2).*

0,75 pt c) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ *, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

0,5 pt 2) a) *Montrer que f est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *puis vérifier que :* $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

0,25 pt b) *En déduire que f est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$.

0,25 pt c) *Vérifier que :* $f([0;+\infty[)=[1;+\infty[$.

0,5 pt 3) *Représenter graphiquement la courbe* (C).

(On construira aussi la demi-tangent à droite au point d'abscisse 0)

Partie III :

1) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$.

0,5 pt a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $0\leq f'(x)\leq \frac{1}{2}$.

0,5 pt b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$;puis montrer que : $g(]0;+\infty[)=]-\infty;1[$

0,25 pt c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) Soit a un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0=a$ et $(\forall n\in IN)$: $u_{n+1}=f(u_n)$

0,25 pt a) Montrer que $(\forall n\in IN)$; $u_n>0$.

0,5 pt b) Montrer que $(\forall n\in IN)$: $|u_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0,5 pt c) Montrer que $(\forall n\in IN)$: $|u_n-\alpha|\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|$.

0,25 pt d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers α .

Exercice 5 : (2,5 points)

On considère la fonction F définie sur IR par : $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$

0,5 pt 1) Montrer que F est continue et strictement croissante sur IR.

0,5 pt 2) a) Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $F(x)\geq x$, En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5 pt b) Montrer que F est impaire, puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

0,5 pt c) Montrer que F est bijective de IR dans IR.

0,5 pt d) Montrer que la bijection réciproque G de la fonction F est dérivable en 0, puis calculer $G'(0)$.