Exercice 1

Soit P la fonction polynômiale réelle définie par ; $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$.

On suppose que les coefficients de P satisfont la relation $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$.

En considérant une primitive de P, montrer que P admet au moins une racine dans l'intervalle $]0;1[$.

Exercice 2

On cherche à calculer la valeur $f(x)$ *prise par une fonction f en un point x connaissant la valeur approchée* a *de x à* 10^{-k} *près.*

En prenant $f(a)$ *comme valeur approchée de* $f(x)$ *l'erreur est majorée par* $M=|x-a|$.

Ainsi si a est valeur approchée de x à 10^{-2} *près, pour la fonction sinus on peut prendre* $M=1$ *, on a ainsi une majoration uniforme,* $\sin a$ *est une valeur approchée de* $\sin x$ *à* 10^{-2} *prés .*

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I . On suppose que f et g sont dérivables en $a\in I$ *et que* $g'(a)\neq 0$ *. Montrer que :* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

(C'est la «Règle de l'Hôpital»).

Exercice 4

Pour chacune des applications f définies ci-dessous :

1. *Vérifiez que f est prolongeable par continuité en 0.*
2. *L'application prolongée est-elle dérivable en 0 ?*

- $f(x)=x|x|$
- $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$
- $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$
- $f(x)=\cos\sqrt{x}$
- $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

Exercice 5

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous :

1. *Préciser le domaine de définition de f .*
2. *Soit* I *un intervalle ouvert inclus dans* D_f *. Montrer que f est dérivable sur* I
3. *Calculer l'expression de la dérivée de f .*

- $f(x)=\left(x(x-2)\right)^{\frac{1}{3}}$
- $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$
- $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}$
- $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}$
- $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}^2}{1+(1+x)^{\frac{1}{3}}}$
- $f(x)=\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$
- $f(x)=\sqrt{1+x^2\sin^2(x)}$

Exercice 6

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, sur un intervalle $[a;b]$ *:*

1. *Démontrer que f est dérivable sur* $]a;b[$.
2. *La fonction f est-elle dérivable à droite en a ?*
3. *La fonction f est-elle dérivable à gauche en b ?*

- $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ *sur* $[0;1]$
- $f(x)=\sqrt{(1-x)(1-x^2)}$ *sur* $[-1;1]$
- $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)$ *sur* $[0;1]$
- $f(x)=(1-x^2)^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}$ *sur* $[-1;1]$
- $f(x)=\sqrt{x\sin(x)(1-\sin(x))}$ *sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- $f(x)=\sqrt{(1-\cos(x))(1-\sin(x))}$ *sur* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 7

Soient a et a deux réels tels que : $a<b$ *. Soit f une fonction définie sur* $[a;b]$ *, dérivable à gauche et à droite en tout point de* $]a;b[$*. On suppose que f est continue à gauche en a, à droite en b et que :* $f(a)=f(b)$.
Montrer qu'il existe un point $c\in]a;b[$ *tel que le produit de la dérivée à gauche en c par la dérivée à droite en c soit négatif ou nul.*

Exercice 8

Soit f une fonction continue sur $[0;+\infty[$ *, dérivable sur* $]0;+\infty[$*, telle que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(0)$
Montrer qu'il existe $c>0$ *tel que :* $f'(c)=0$.

Exercice 9

Soient a et b deux réels tels que : $a<b$ *. Soient f et g deux fonctions définies sur* $[a;b]$*, dérivables sur* $]a;b[$*. On suppose que* g' *ne s'annule pas sur* $]a;b[$.

1. *Montrer que le théorème de Rolle s'applique à la fonction :*
   $x\mapsto\left(f(b)-f(a)\right)g(x)-\left(g(b)-g(a)\right)f(x)$
2. *En déduire qu'il existe un point* $c\in]a;b[$ *tel que :* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice 10

Soit f une fonction continue sur $[0;+\infty[$ *,dérivable sur* $]0;+\infty[$*, telle que :* $f(0)$*. On suppose que* f' *est croissante sur* $]0;+\infty[$*. Démontrer que la fonction g définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ *est croissante.*

Exercice 11

1. *Etudier les variations de la fonction* $x\mapsto x^5-5x+1$ *sur* $\mathbb{R}$*. En déduire que l'équation* $x^5-5x+1=0$ *a trois solutions réelles.*
2. *Soient a et b deux réels et n un entier naturel. Montrer que l'équation* $x^n+ax+b=0$ *a au plus trois solutions réelles.*
3. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à* 2*. Montrer que l'équation* $x^n+x^{n-1}+x^2+x-1=0$ *a une seule solution réelle positive.*

4. *Soit a un réel positif et n un entier naturel pair. Montrer que l'équation* $\left(x+a\right)^{n}=x^{n}+a^{n}$ *admet* $x=0$ *pour seule solution réelle.*

Exercice 12

Soient a et b deux réels tels que $a<b$.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a;b]$ *telle que :* $f(a)=f(b)=0$ *et pour tout* $x\in]a;b[$; $f''(x)\leq 0$.
Montrer que, pour tout $x\in[a;b]$; $f(x)\geq 0$.

Exercice 13

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$, $f'(x)\geq 0$ *et* $f''(x)\geq 0$.

1. *Montrer que si f est majorée alors f est constante.*
2. *Montrer que si f n'est pas majorée, alors :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
3. *Montrer que la limite quand x tend vers* $+\infty$ *de* $\dfrac{f(x)}{x}$ *existe, et qu'elle est soit infinie, soit finie et strictement positive.*
4. *Soit* $f: x\mapsto x+\sqrt{x^{2}+1}$. *Montrer que f vérifie les hypothèses de l'exercice, et calculer la limite quand x tend vers* $+\infty$ *de* $\dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 14

Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I, *dérivable en un point* $c\in I$, *et telle que :* $f'(c)=0$.
Montrer que c est un minimum global pour f sur I : $\forall x\in I$; $f(c)\leq f(x)$

Exercice 22

1. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle* I. *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^{*}$, *pour tout* $x_1;....;x_n\in I$, $f\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\leq\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$
2. *Démontrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^{*}$, *et pour tout* $x_1;....;x_n\in\mathbb{R}^{+}$, $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^{2}\leq\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leq\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{2}}$
3. *Démontrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^{*}$, *et pour tout* $x_1;....;x_n\in\mathbb{R}_{+}^{*}$, $\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\leq\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$.
4. *Démontrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^{*}$, *et pour tout* $x_1;....;x_n\in\mathbb{R}_{+}^{*}$, $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}\right)^{-1}\leq\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$

Exercice 23

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

1. *Montrer que, pour tout* $x;y\in\mathbb{R}_{+}^{*}$, $xy\leq\dfrac{x^{p}}{p}+\dfrac{y^{q}}{q}$
2. *Soient* $x_1;....;x_n;y_1;....;y_n\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ *tels que :* $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\,p}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{\,p}=1$

Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq 1$

3. *Soient* $x_1;....;x_n;y_1;....;y_n \in \mathbb{R}_+^*$. *Démontrer l'inégalité de Hölder :* $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^q\right)^{\frac{1}{q}}$

4. *Soit* $p > 1$. *Démontrer l'inégalité de Minkowski :* $\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^q\right)^{\frac{1}{q}}$

   (On posera $q = \dfrac{p}{p-1}$ *et* $(x_i + y_i)^p = x_i (x_i + y_i)^{p-1} + y_i (x_i + y_i)^{p-1}$*).*