



Problème « Etude de fonction logarithmique » 2ème Bac SM

Problème

Partie I :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x \ln x$

- 1) Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$
- 2) Montrer que pour tout $x > 0$; $1 + x \ln x > 0$ puis déduire que : $\forall x > 0$; $x > \ln x$.

Partie II :

On considère la fonction f définie $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + x \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
- 2) Etudier les variations de la fonction f puis déduire que : $f(]0; +\infty[) =]0; 1]$
- 3) a) Etudier la position relative de (C_f) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.
b) Construire (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie III :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $]0; +\infty[$ deux solutions x_n et y_n tels que : $x_n \leq 1 \leq y_n$
- 2) a) Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \leq y_n$ (On peut utiliser l'inégalité $(\forall x > 0 ; x - 1 \geq \ln x)$).
c) Déduire la limite de la suite $(y_n)_{n \geq 1}$.
d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1 + y_n \ln y_n}$.
- 3) a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante ; puis déduire qu'elle est convergente.
b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n \leq \frac{1}{n}$; déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

Partie VI :

Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 > 0 \text{ et } U_0 \neq 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_n < 1$.
b) Etudier la monotonie de la suite (U_n) ; puis déduire qu'elle est convergente.
c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$.

2) a) Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1; +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 ; x \ln x \geq -\frac{1}{e}.$$

b) On prend $U_0 = \alpha$ et on considère la suite (V_n) définie par :
$$\begin{cases} V_0 = U_0 \\ V_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_{n-1} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

(i) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = e^{\frac{1}{U_n}}$

(ii) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.