Exercice corrigé « Fonction ln » *2éme Bac SM*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ *par :* $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{\ln x}$ *. On nomme* (C) *la courbe représentative de f et* (Γ) *la courbe d'équation* $y=\ln x$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser la limite à droite en 1 et en $+\infty$ *.*

2. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$*. Interpréter graphiquement cette limite.*

b. Etudier la position relative de (C) *et de* (Γ).

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) *passant par le point O.*

a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$ *.*

Démontrer que la tangente T_a *à* (C) *au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si* $f(a)-af'(a)=0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ *par :* $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

b. Montrer que sur $]1;+\infty[$*, les équations* $g(x)=0$ *et* $(\ln x)^3-(\ln x)^2-(\ln x)-1=0$ *ont les mêmes solutions.*

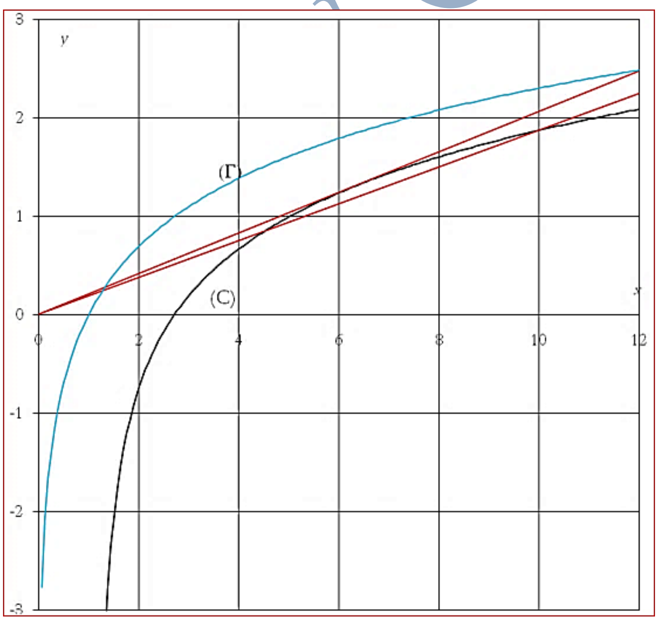
c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $u(t)=t^3-t^2-t-1$ *, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur* $\mathbb{R}$ *.*

d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) *passant par le point O.*

La courbe (C) *et la courbe* (Γ) *sont données ci-dessus. Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.*

4. On considère un réel m et l'équation $f(x)=mx$ *d'inconnue x.*

Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1;10]$



Correction

1) On a : $f : u \mapsto u - \dfrac{1}{u}$ *où* $u : x \mapsto \ln x$ *; u est dérivable et ne s'annule pas sur* $]1;+\infty[$ *; donc f est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *en tant que composée de deux fonctions dérivables sur* $]1;+\infty[$.

On pour tout $x \in]1;+\infty[$: $f'(x) = u'(x) + \dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$ *; donc :* $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{\ln^2(x)}\right)$

Comme $x > 0$ *alors* $\forall x \in]1;+\infty[$; $f'(x) > 0$.

C'est-à-dire que f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

On a : ▪ $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$ *; donc* $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty}$

▪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = +$ *; donc* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \ln x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{\ln x} = 0$

La courbe (C) *et la courbe* (Γ) *sont asymptotes l'une à l'autre au voisinage de* $+\infty$.

b) On a : $\left(f(x) - \ln x \right) = -\dfrac{1}{\ln x}$ *et comme* $x \in]1;+\infty[$ *alors* $\left(f(x) - \ln x \right) < 0$.

Par suite la courbe (C) *est au-dessous de la courbe* (Γ).

3. a. T_a *a pour équation* $y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(a)x + \left(f(a) - af'(a) \right)$; T_a *passe par l'origine du repère*

Si $0 = f'(a) \times 0 + f(a) - af'(a) \Leftrightarrow f(a) - af'(a) = 0$.

b. $g(x) = 0$ *équivaut à* $f(x) - xf'(x) = 0$ *; or* $f'(x) = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{\ln^2(x)}\right)$ *et* $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$ *soit :*

$$\ln x - \frac{1}{\ln x} - x \times \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln^2(x)}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{\ln x} - 1 - \frac{1}{\ln^2(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln^3(x) - \ln^2(x) - \ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = 0$$

Par conséquent les équations $g(x) = 0$ *et* $\ln^3(x) - \ln^2(x) - \ln(x) - 1 = 0$ *ont les mêmes solutions.*

c. $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t-1)(3t-1)$ *; donc* $u'(t) \geq 0$ *pour t appartenant à* $\left]-\infty; -\dfrac{1}{3}\right] \cup [1;+\infty[$

et $u'(t) \leq 0$ *pour t appartenant à* $\left[-\dfrac{1}{3}; 1\right]$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896

d. T_d passe par l'origine du repère si $\ln^3(x)-\ln^2(x)-\ln(x)-1=0$, c'est-à-dire si $u(\ln x)=0$. Or la question 3. c. prouve que cette équation n'admet qu'une solution, que l'on notera α_0 sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha_0 \simeq 6,29$: il n'existe qu'une seule tangente à (C) passant par l'origine du repère.

4. Par lecture graphique: résoudre $f(x)=mx$ revient à chercher l'intersection entre (C) et les droites passants par l'origine et de pente m; on a donc pour $1\le x\le 10$ et $m_0=\dfrac{f(10)}{10}$.

- si $m\le m_0$ l'équation $f(x)=mx$ admet une seule solution;
- si $m_0=0,187\le m\le f'(\alpha_0)=0,2$ l'équation $f(x)=mx$ admet deux solutions;
- si $m> f'(\alpha_0)$ l'équation $f(x)=mx$ n'admet aucune solution.