Série d'exercices sur limites et continuité — 2éme Bac SM

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f définie sur $I = \left]-1;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[n]{x+1} - \dfrac{1}{\sqrt[n]{x+1}} & si \quad x \in]-1;0] \\ f(x) = -1 + \dfrac{1}{\cos^n x} & si \quad x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est continue for I.

b) Etudier les variations de f sur I.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer

b) Montrer que : $\begin{cases} f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n & si \quad x \in]-\infty;0] \\ f^{-1}(x) = Arc\tan\left(\sqrt{(x+1)^{\frac{2}{n}} - 1}\right) & si \quad x \in]0;+\infty] \end{cases}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier le continuité de f en $x_0 = 0$

2) a) Etudier le parité de f

b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ sans utiliser la fonction dérivée.

3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

6) Déduire une expression simplifiée de $f(x)$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer que : $5\text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\text{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right) = \frac{\pi}{4}$

On pose : $a = \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right)$ et $b = \text{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right)$

1) Calculer $\tan 2a$ et $\tan 2b$

2) Déduire la valeur de $\tan(5a+2b)$

3) Montrer que : $0 < 5a + 2b < \frac{5\pi}{4}$

4) Déduire que : $5\text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\text{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): \text{Arctan}(x) = 2\text{Arctan}(2) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{4}\right)$

1) Montrer que : $2\text{Arctan}(2) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{4}\right) > 0$.

2) Déduire que (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Exercice 5

1) Montrer qu'il existe un entier n tel que : $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = n+\sqrt{2}$

2) Calculer $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Exercice 6

Montrer que l'équation : (E): $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x+2} = 5-x$

Admet une unique solution dans l'intervalle $[1;5]$

Exercice 7

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 12 = 0$

Soit S l'ensemble de solution de (E)

1) Montrer que : $64 \in S$.

2) Déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 8

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]0;1[$ telle que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

1) Montrer que : $(\forall a \in]2;+\infty[)$; $(\exists \alpha \in]0;1[) / f(\alpha) = a$

2) Montrer que : $(\exists \beta \in]0;1[) / \frac{1}{1-\beta} + \tan\left(\frac{\sin(\pi\beta)}{4\beta}\right) = \frac{12}{\pi}\text{Arc}\tan\frac{12\pi}{7}$

Exercice 9

Soit f le fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}(x+1)$.

1) Montrer que le fonction f est impaire ; puis calculer les limites de f au bornes de D_f .

2) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $f(x) = \frac{\pi}{2}$

et soit S l'ensemble des solutions de (E).

a) Montrer que : $x \in S \Rightarrow 3x^2 = 2$.

b) Montrer que : $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

c) Déduire que : $\sqrt{\frac{2}{3}} \in S$

d) Montrer que : $-\sqrt{\frac{2}{3}} \notin S$

3) Déduire les solutions de (E).