Série n° 15 d'exercices « Etude de fonction» **2éme Bac SM**

EXERCICE 1

On pose $a=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

1 - Vérifier que a est une solution d'une équation de la forme $x^3=\alpha x+\beta$ ou α et ß sont des entiers naturels.

2 – Montrer que $a\in\left]\frac{7}{2};\frac{15}{4}\right[$; puis déduire une valeur approchée de a à 10^{-1} prés.

EXERCICE 2

Partie :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par : $\begin{cases} f(x)=-(x+1)^2 & si\ x<-1 \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} & si\ -1\leq x<1 \end{cases}$

1) Étudier la continuité de sur $]-\infty;1[$.

2) Etudier la dérivabilité de f sur $]-\infty;1[$ et déterminer sa fonction dérivée f'.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera ; déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

4) a) Construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$;(C_f) la courbe représentative de f.

On précisera les demi-tangentes au point d'abscisse(-1).

b) Construire dans le même repère$(C_{f^{-1}})$ la courbe représentative de f^{-1}.

5) Calculer $f\left(-\frac{3}{2}\right)$; puis donner une équation de la tangente a la courbe $(C_{f^{-1}})$ au point d'abscisse$-\frac{1}{4}$.

6) Résoudre dans les équations :

a) $(f(x))^6=64$ b $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt{2}$ c) $(f(x))^5=-4\sqrt{2}$

Partie B :

Suit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$..

1) Étudier la dérivabilité de g et montrer que : $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $g'(x)=\dfrac{1}{1-\sin(x)}$

2) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

3) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que : $(\forall x\in J)$; $(g^{-1})'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$

4) Soit φ la fonction définie sur J par : $\varphi(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que φ est dérivable sur J et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire l'expression de $\varphi(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0 = 0$.

EXERCICE 4

On Considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{6x}{x+2} & si \quad x \in \left]-\infty;1\right] \\ f(x) = \sqrt{3x+1} & si \quad x \in \left[1;+\infty\right[\end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définie D_f de f.

2) Etudier la continuité de f en 1.

3) Etudier la dérivabilité de f en 1.

EXERCICE 5

Soit la fonction $f \ : x \mapsto \dfrac{x^2 + |x-2|}{|x+1|}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Etudier la continuité de f en -1 et en 2.

3) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 2 ; puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .

5) a) Montrer que la droite Δ_1 d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$; puis la position relative de (C_f) et de Δ_1 .

b) Montrer que la droite Δ_2 d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$; puis étudier la position relative de (C_f) et de Δ_2 .

6) Etudier les variations de f sur D_f .

7) Dresser le tableau de variations de f .

8) Tracer Δ_1 ; Δ_2 et (C_f) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.