Exercice 1

Considérons le nombre complexe $\omega=\sqrt{6}(1+i)+\sqrt{2}(1-i)$.

1) Donner la forme algébrique de ω .

2) Calculer ω^2 *et donner sa forme trigonométrique.*

3) Donner alors la forme trigonométrique de ω.

4) Déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

5) Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'entier naturel n pour que ω^n *soit réel.*

Correction Exercice 1

1) $\omega=\sqrt{6}(1+i)+\sqrt{2}(1-i)=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

2) $$\begin{aligned}\omega^2&=\left(\sqrt{6}(1+i)+\sqrt{2}(1-i)\right)^2\\&=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2+2i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\\&=8+2\sqrt{6}\sqrt{2}-8+2\sqrt{6}\sqrt{2}+8i\\&=\cancel{8}+4\sqrt{3}-\cancel{8}+4\sqrt{3}+8i\\&=8\sqrt{3}+8i\\&=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\end{aligned}$$

Donc : $\omega^2=16\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

3) ω *est une racine carrée de* ω^2 *donc :* $\omega=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ *ou* $\omega=4\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

Or $Re(\omega)=\sqrt{6}+\sqrt{2}>0$ *; d'où :* $\omega=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

4) $\omega=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

5) ω^n *est réel signifie que* $Im(\omega)=0$ *: donc comme* $\omega^n=4^n\left(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}\right)$ *; alors* $\sin\frac{n\pi}{12}=0$

Par suite $\frac{n\pi}{12}=2k\pi$ *ou* $\frac{n\pi}{12}=\pi+2k\pi$

Càd $n=24k$ *ou* $n=12+24k$ *où* $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 2

Soit z un nombre complexe et $M(x;y)$ *son image dans le plan complexe.*

On pose $Z=|z|^2-2z+3\bar{z}$ *. On pose* $Z=X+iY$ *où X et Y sont deux réels*

1) *Calculer X et Y en fonction de x et y.*
2) *Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.*
3) *Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit imaginaire.*
4) *En déduire l'ensemble des points M tel que l'on ait* $\arg Z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Correction Exercice 2

1) $Z=|z|^2-2z+3\bar{z}$

$$=x^2+y^2-2(x+iy)+3(x-iy)$$

$$=x^2+x+y^2-5iy$$

Donc : $X=x^2+x+y^2$ *et* $Y=-5y$

2) $Z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -5y=0 \Leftrightarrow y=0$ *; donc z est un réel càd M appartient à l'axe des réels.*

3) *Z imaginaire pur* $\Leftrightarrow x^2+x+y^2=0$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc M appartient au cercle (ζ) *de centre* $\Omega\left(-\frac{1}{2};0\right)$ *et de rayon* $r=\frac{1}{2}$.

4) $\arg Z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow Z$ *imaginaire pur* $\Leftrightarrow Im(Z)>0$

$$\Leftrightarrow -5y>0 \Leftrightarrow y<0$$

Donc M appartient à l'intersection de (ζ) *et du demi plan* $y<0$