



Devoir surveillé N4 : 2H

2BAC SMF (A-B)

guessmaths

Matière : MATHÉMATIQUES

Prof : Haddar

Exercice 1 (16 pts)

Partie A

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1p 1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x - x - 1 \geq 0$

1p 2) Montrer que f est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$

1,5p 3) a-Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

1,5p b-Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) < 0$ (On pourra utiliser la question (1))

1,5p 4) a-Montrer que : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \frac{x^2}{2} \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$

1,5p b- En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = \frac{-1}{2}$, puis interpréter

géométriquement le résultat.

1p 5) a-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

1p b-Dresser le tableau de variations de f

1p 6) Construire la courbe (C) .

Partie B

On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n); n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1p 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

1p 2) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

1p 3) Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation suivante : $f(x) = x$

1p 4) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

1p b- En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 2 : (4 pts)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1,5p 1) Vérifier que : $i = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$, puis déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation :

$$z^2 - i = 0$$

2) soit z un nombre complexe tels que : $z\bar{z} = 1$ et $z \neq 1$

1,5p a- Montrer que $i \left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}$ b- Montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$

1p 3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $z\bar{z} = z + \bar{z}$