

EXERCICE 1:

Equation diophantienne

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \text{ et } b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont divisibles par $n - 4$.
2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le $\text{pgcd}(\alpha, \beta)$.
 - a. Etablir une relation entre α et β indépendante de n .
 - b. Démontrer que 5 divise d .
 - c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4. a. Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n , le $\text{pgcd}(a, b)$.
(On pourra utiliser les résultats des questions 2.c. et 3.)
b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

EXERCICE 2:

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. a) Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S .
b) En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.
c) Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair et l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que: $SP = 84$.
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{pgcd}(a; b)$$
 (On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux)

EXERCICE 3:

Partie I

Soit x un nombre réel

1. Montrer que : $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.
3. Déduire que le nombre : $2019^4 + 4^{2019}$ n'est pas premier.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$; $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n , divise 2
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B , divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair
 - a) Montrer que A et B sont impairs En déduire que d est impair
 - b) Montrer que d divise n
 - c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
 - a) Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

- b) Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.
- c) Montrer que p divise n . En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

EXERCICE 4:

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

- Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.
 - Montrer que si a existe, a est impair.
 - En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.
- Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
 - Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
 - Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.
 - On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$.
Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.
- Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
 - En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.
 - On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2 c démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $9 + a^2$ soit une puissance entière de 5.

EXERCICE 5: (5 points)

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1; 46]$

- On considère l'équation (E) : $23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs
 - Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E)
 - Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E)
 - En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1[47]$.
- Soient a et b deux entiers relatifs
 - Montrer que si $ab \equiv 0[47]$ alors $a \equiv 0[47]$ ou $b \equiv 0[47]$
 - En déduire que si $a^2 \equiv 1[47]$ alors $a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$
- Montrer que pour tout entier p de A , il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1[47]$
Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A , il existe un unique entier, note : $\text{inv}(p)$, appartenant à A tel que : $p \times \text{inv}(p) \equiv 1[47]$.
Par exemple:
 $\text{inv}(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1[47]$; $\text{inv}(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1[47]$; $\text{inv}(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1[47]$
 - Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = \text{inv}(p)$?
 - Montrer que $46! \equiv -1[47]$.

EXERCICE 6:

- On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
 - Donner une solution particulière de l'équation (E) .
 - Résoudre l'équation (E) .
- Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a; b)$ de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

- a) Montrer que le couple $(a; b)$ est solution de (E) .
- b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
3. a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
- b) Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

EXERCICE 7:

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 1, y_0 = 8$ et
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 1 \end{cases}.$$

- Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
- Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
- Montrer que :
 - x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
 - Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.
- a) Montrer, par récurrence, que : $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.
- b) En déduire que : $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n .

EXERCICE 8:

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n

- Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.
- a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geq 1 + n$.
- b) Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?
- On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts
 - Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.
 - On considère la proposition suivante:
Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts
 $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ Cette proposition est-elle vraie ou fausse? Justifier.
- On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k , où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul
 - Quels sont les diviseurs de n ?
 - En déduire que : $S(n) = \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$
- On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13}q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.
 - Soit m un entier naturel
Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leq s \leq 13$ et $0 \leq t \leq 7$ tels que $m = p^s \times q^t$
 - Démontrer que : $S(n) = \frac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \frac{1 - q^8}{1 - q}$