Exercices n°6 sur « Calcul d'intégrale » 2éme Bac SM

Exercice 1

1) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Calculer la dérivée $f'(x)$ et déduire la valeur de $A=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

2) On considère les intégrales $B=\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$ et $C=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

a) En utilisant une intégration par parties exprimer B en fonction de A

b) Montrer que $A+C=B$ déduire C; B.

Exercice 2

Pour tout neIN et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on pose : $f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

Partie 1

1) Montrer que : $I_0=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$; puis calculer I_1.

2) Vérifier que:$(\forall n\in \mathrm{IN}^*)$; $I_n+I_{n+1}=\left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right)$ puis déduire : I_2

3) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathrm{IN}^*}$ définie par : $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\sqrt[n]{e^{-k}}\right)^2}{1+\sqrt[n]{e^{-k}}}\right)$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathrm{IN}^*}$ est convergente puis calculer sa limite

Partie 2

1) a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est décroissante 1neIN1-e1-é)SI puis déduire

b) Montrer que : $(\forall n\in \mathrm{IN}^*)$; $\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right)\leq I_n\leq\left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right)$; puis Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

2) a) En utilisant une intégration par partie montrer que : $(\forall n\in \mathrm{IN}^*)$;

$$nI_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{e^n+e^{n-1}}\right)+\int_0^1\left(\frac{e^{-(n+1)x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\right)dx$$

b) Montrer que :$(\forall n\in \mathrm{IN}^*)$;$0<\int_0^1\left(\frac{e^{-(n+1)x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\right)dx<\frac{1}{n+1}$; puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

WWW.GUESSMATHS.CO

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896

3) pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $J_n = (-1)^n I_n$ et $u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(1-e^{-k}\right)\right)$

a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $J_{k+1} - J_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(1-e^{-k}\right)$; puis déduire que:

$u_n = (-1)^{n+1} I_{n+1} + I_1$

b) Déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3

On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

1) Montrer que : $(\forall x \geq 0)$; $F'(x) = \arctan x$

2) On considère les suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ définies par $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{k}{n}\right)$ et

$v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\arctan^2\left(\frac{k}{n}\right)$

a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

b) En appliquant TAF sur l intervalle $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$; montrer que :

$u_n - \frac{\pi}{4n} \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \leq u_n$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

d) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par une 2éme méthode.

WWW.GUESSMATHS.CO