

Ensembles de points

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie :

- $|z + 1 - i| = 3$
- $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- $|z - 3| = |z + 2 + 3i|$
- $\arg\left(\frac{z - 1 + 2i}{z + 1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

Correction

- $|z + 1 - i| = 3 \Leftrightarrow |z - (-1 + i)| = 3$
 $\Leftrightarrow AM = 3$ avec A le point d'affixe $z_A = -1 + i$ $z_A = -1 + i$.
 Donc M appartient au cercle de centre A(-1;1) et de rayon 3.
- $|z - 3| = |z + 2 + 3i| \Leftrightarrow |z - 3| = |z - (-2 - 3i)|$
 $\Leftrightarrow BM = CM$ avec B d'affixe $z_B = 3$ et C d'affixe $z_C = -2 - 3i$.
 Donc M appartient à la médiatrice du segment [BC].

- $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z - (1 + i)) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
 $\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{EM}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ avec E d'affixe $z_E = 1 + i$.
 Donc M appartient à la demi-droite d'origine E privé de E, de vecteur directeur $\vec{u}_1$ tel que $(\vec{u}; \vec{u}_1) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{z - 1 + 2i}{z + 1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - (1 - 2i)}{z - (-1)}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$
 $\Leftrightarrow (\vec{GM}; \vec{FM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ avec F d'affixe $z_F = 1 - 2i$ et G d'affixe $z_G = -1$.

Donc M appartient au cercle de diamètre [FG] privé des points F et G.

Nombres complexes et configurations géométriques

Exercice d'application

A ; B et C trois points d'affixes respectives : $z_A = 2i$; $z_B = 2 + i$ et $z_C = 1 - i$.
 Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en B.

Correction

$$\begin{aligned}AB &= |z_B - z_A| \\&= |2 - i| \\&= \sqrt{2^2 + (-1)^2} \\&= \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BC &= |z_C - z_B| \\&= |-1 - 2i| \\&= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} \\&= \sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc ABC isocèle en B.

$$\begin{aligned}\text{D'autre part : } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} &= \frac{2i - (2 + i)}{1 - i - (2 + i)} \\&= \frac{i - 2}{-1 - 2i} \\&= \frac{i(1 + 2i)}{-(1 + 2i)} \\&= -i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) &\equiv \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)[2\pi] \\&\equiv \arg(i)[2\pi] \\&\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

Donc ABC est rectangle en B.

Par suite ABC est rectangle-isocèle en B.