



Série n° 2 d'exercices sur les structures

2ème Bac SM

Exercice 1 :

On muni l'ensemble $I = \mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall ((x,y);(x',y')) \in I^2 \right) : (x,y) * (x',y') = (x + x' + xx', y + y')$$

$$\text{On pose } \left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right), \left(\forall n \in \mathbb{N}^* \right) : ((x,y))^{(n)} = \underbrace{(x,y) T (x,y) T \cdots T (x,y)}_{n \text{ fois}}$$

$$\text{Soit } G = \{(x,y) \in I / x \neq -1\}$$

1. a. Montrer que G est une partie stable de $(I, *)$.

b. Montrer que G est un groupe abélien.

2. Soit $H = \{(x, \ln(x+1)) / x \in]-1; +\infty[\}$.

a. Montrer que H est un sous-groupe de $(G, *)$.

b. Montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \right), \left(\forall x \in]-1; +\infty[\right) : \left((x, \ln(x+1)) \right)^{(n)} = \left((x+1)^n; \ln(x+1)^n \right)$

Exercice 2 :

$$\text{On pose } I =]0; +\infty[$$

1. Montrer que $\left(\forall (x,y) \in I^2 \right) : e^{x+y} - e^x - e^y + 1 > 0$

2. On définit sur I la loi de composition interne T par : $\left(\forall (x,y) \in I^2 \right) :$

$$xTy = \ln(e^{x+y} - e^x - e^y + 2)$$

a. Montrer que $\phi : \begin{matrix} I \rightarrow I \\ x \rightarrow \ln(x+1) \end{matrix}$ est une bijective et déterminer sa réciproque ϕ^{-1} .

b. Démontrer que ϕ est un homomorphisme de $(I, \times)$ dans (I, T) .

c. En déduire que (I, T) est un groupe abélien.

3. Déterminer e_T l'élément neutre de I par la loi T et le symétrique de x , pour tout $x \in I$.

4. On pose : $\left(\forall x \in I \right), x^{(0)} = e$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N} \right), x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$. Déterminer $x^{(n)}$ et $x(n) 0$

Exercice 2:

On pose $I =]0, +\infty[$

1. Montrer que $\forall (x, y) \in I^2 : e^{x+y} - e^x - e^y + 1 > 0$
2. On définit sur I la loi de composition interne T par :

$$\forall (x, y) \in I^2 : xTy = \ln(e^{x+y} - e^x - e^y + 2)$$

- a. Montrer que $\varphi : \begin{matrix} I & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & \ln(x+1) \end{matrix}$ est une bijective et déterminer sa réciproque φ^{-1} .
 - b. Démontrer que φ est un homomorphisme de $(I, \times)$ dans (I, T) .
 - c. En déduire que (I, T) est un groupe abélien.
3. Déterminer e_T et le symétrique de x , pour tout $x \in I$.
 4. On pose : $\forall x \in I, x^{(0)} = e$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$. Déterminer $x^{(n)}$ et $(x^{(n)})'$.

Exercice 3 :

Soit $I =]1, +\infty[$. On définit sur I la loi $*$ par : $a * b = \sqrt{1 + (a^2 - 1)(b^2 - 1)}$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur I
2. Montrer que $\phi : \begin{matrix} (\mathbb{R}_+^*, \times) & \longrightarrow & (I, *) \\ x & \longmapsto & \ln(x+1) \end{matrix}$ est un isomorphisme et en déduire la structure de $(I, *)$.
3. a. Montrer que $E = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
b. Montrer que $E = \{\sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(I, *)$.

Exercice 4 :

Soit $G =]-1, 1[$. Pour tout $(x, y) \in G^2$, on pose $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

1. a. Montrer que $*$ est une loi interne sur G .
b. Montrer que $*$ est commutative et associative.
c. Montrer que $(G, *)$ admet un élément neutre à déterminer.
2. Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.

Exercice 5 : Ex Nat Sess de Rattrapage 2011

Soit $I =]0, 1[$.

Pour tout $(x, y) \in I^2$, on pose : $x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$.

1. a. Montrer que $*$ est une loi interne sur I .
 b. Montrer que $*$ est commutative et associative.
 c. Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre à déterminer.
2. Montrer que $(I, *)$ est un groupe abélien.
3. On considère les ensembles : $H = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ et $K = \left\{ \frac{1}{1+2^n} / n \in \mathbb{Z} \right\}$.
 a. Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
 b. Montrer que $\phi : \begin{matrix} (H, \times) \rightarrow (I, *) \\ x \mapsto \frac{1}{1+x} \end{matrix}$ est un homomorphisme de groupe.
 c. En déduire que $(K, *)$ est un sous-groupe de $(I, *)$

Exercice 6 :

1. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, *)$
 a. Montrer que $(H \cap K, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
 b. Montrer que $(H \cup K, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ ssi $H \subset K$ ou $K \subset H$
 c. $(5\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}, +)$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?
2. Montrer que les seuls sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.
3. a. Montrer que k est inversible dans $(\mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}, \times)$ si et seulement si $k \wedge n = 1$.
 b. En déduire que $((\mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z})^*, \times)$ est un groupe ssi n est premier.

Exercice 7 :

Soit $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ et $U_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$, pour tout entier naturel $n \geq 2$.

1. Montrer que $(U, \times)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2. Montrer que $(U_n, \times)$ est un sous-groupe du groupe $(U, \times)$.

3. a. Vérifier que : $U_n = \{\omega_k / k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ avec $\omega_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$.

b. Montrer que $\phi: (\mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}, +) \rightarrow (U_n, \times)$
 $k \rightarrow \omega_k$

c. En déduire que $\frac{1}{\omega_k} = \omega_{n-k}$ et $\omega_k = \omega_1^k$.

Exercice 8 :

On considère l'ensemble $E = \left\{ M_x = \begin{pmatrix} 1 & \ln x & \ln^2 x \\ 0 & 1 & 2\ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.

1. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

2. a. Montrer que l'application $\psi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow E$
 $x \rightarrow M_x$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, vers $(E, \times)$.

b. En déduire que $(E, \times)$ est un groupe abélien.

3. a. Déterminer M_x^{-1} , pour tout $x > 0$.

b. Résoudre dans E , l'équation : $M_e \times X = M_{e^2}$.

c. Calculer $(M_x)^n$ et $((M_x)^n)^{-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \neq 1$.

• Montrer que $E = \{M_{\alpha^x} / x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $(E, \times)$.

Exercice 9 :

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. Soit l'ensemble

$$E = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et que $\times$ est commutative dans E .

2. a. Montrer que l'application $\phi: \mathbb{R} \rightarrow E$
 $x \rightarrow A(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans

$(E, \times)$.

b. En déduire la structure de $(E, \times)$ et déterminer $(A(x))^{-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On considère l'ensemble $F = \{A(n) / n \in \mathbb{Z}\}$.

• Montrer que $(F, \times)$ est un sous-groupe $(E, \times)$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $A^0(x) = I$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : A^{n+1}(x) = A^n(x) \times A(x)$ et $A^{-n}(x)$ désigne l'inverse de $A^n(x)$ dans $(E, \times)$.

a. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}), (\forall p \in \mathbb{Z}) : A^p(a) = A(ap)$.

b. Résoudre dans E , l'équation $X^{-3} = A(\ln 2)$.

5. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, $G = \{A^n(\alpha) \times A^m(\beta) / (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$

a. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe abélien.

b. Montrer que $F = G \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta = 1$.

Exercice 10 :

Soient $m \in \mathbb{R}^*$. $E = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{m} \right\}$, $I =]-\infty; \frac{1}{m}[$ et $J =]\frac{1}{m}; +\infty[$ on pose $x * y = x + y - mxy$, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

Partie I :

1. Vérifier que : $(\forall (x, y) \in E^2) : (1 - mx)(1 - my) = 1 - m(x * y)$ et en déduire que $*$ est une loi de composition interne dans E .

2. a. Montrer que $*$ est commutative et associative.

b. Montrer que $(E, *)$ est un groupe abélien.

Partie II :

On considère l'application φ_m de E dans $\mathbb{R}^*$ définie par : $(\forall x \in E) : \varphi_m(x) = 1 - mx$.

1. Montrer que φ_m est un isomorphisme de $(E, *)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ et déterminer sa réciproque φ_m^{-1} .

2. En déduire encore que $(E, *)$ est un groupe abélien.

3. Déterminer $\varphi_m^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et en déduire que I ou bien J est un sous-groupe de $(E, *)$

$$4. (\forall n \in \mathbb{Z}) ; (\forall x \in E). \text{ On pose : } \begin{cases} x^{(0)} = e \\ x^{(n)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \\ x^{(n)} = (x^{(-n)})' \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_-^*) \end{cases}$$

• Montrer que pour tout x de E : $(\forall n \in \mathbb{Z}) : x^{(n)} = \frac{1}{m} (1 - (1 - mx)^n)$.

Dans la suite du problème, on suppose que $m = 2$.

Partie III :

$(\forall x \in E)$, on pose : $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$ et $H = \{M(x) / x \in E\}$

1. Montrer que H est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

2. Montrer que l'application $\psi : \begin{matrix} E \rightarrow H \\ x \rightarrow M(x) \end{matrix}$ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(H, \times)$ et en déduire la structure de $(H, \times)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$

a. Déterminer $(M(x))^{-1}$, l'inverse de $M(x)$.

b. Montrer que $(M(x))^n = M\left(\frac{1}{2}(1 - (1 - 2x)^n)\right)$

c. Donner l'expression de $M(-1)$ et prouver que : $(M(-1))^n = \begin{pmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{1-3^n}{2} \\ \frac{1-3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{pmatrix}$

Partie IV :

Pour tout $x \in E$, on pose : $N(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ et $K = \{N(x) / x \in E\}$

1. Montrer que K est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$

2. Montrer que l'application $\varphi: \begin{matrix} E \rightarrow K \\ x \rightarrow N(x) \end{matrix}$ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(K, \times)$ et en déduire la structure de $(K, \times)$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $B = N\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Montrer que : $B^n = M\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$ et $(B^n)^{-1} = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Exercice 11 :

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, On considère l'ensemble : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. a. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

b. En déduire la structure de $(E, \times)$.

2. On considère l'application $\varphi: \begin{matrix} E \rightarrow \mathbb{C} \\ M(a;b) \rightarrow a + b + ib \end{matrix}$

a. Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, +)$

b. Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.

c. Soit $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E^* = E - \{\theta\}$. Quel est la structure de $(E^*, \times)$? justifier votre réponse.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - 2 + 2i = 0$.

b. En déduire les solutions de l'équation : $M(a,b) \in E : (M(a,b))^3 = M(4,-2)$

Exercice 12 :

On considère l'ensemble $A = \{a + b\sqrt{2} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$
2. a. Montrer que : $(A, +, \times)$ est un anneau unitaire, commutatif intègre.
b. $(A, +, \times)$ est-il un corps ?
3. Pour tout $x = a + b\sqrt{2}$ de A , on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$.
a. Montrer que : $(\forall (x, y) \in A^2) : N(x \times y) = N(x) \times N(y)$
b. En déduire que si x est inversible dans $(A, \times)$ alors $N(x^{-1}) = (N(x))^{-1}$.
c. Montrer que x est inversible dans $(A, \times)$ si et seulement si $|N(x)| = 1$.
4. a. Montrer que $1 + \sqrt{2}$ est inversible dans $(A, \times)$ et déterminer son inverse.
b. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), (1 + \sqrt{2})^{-n} \in A$

Exercice 13 :

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, On considère l'ensemble : $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On pose : $I = M(1, 0)$ et $J = M(0, 1)$.

1. a. Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
b. Montrer que la famille $B(I, J)$ est une base de $(E, +, \cdot)$ et en déduire $\dim(E)$.
c. Montrer que $J^2 = -3I$ puis en déduire que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
d. Soit $S_n = I + J + J^2 + \dots + J^n, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Déterminer les coordonnées du vecteur S_n dans la base $B(I, J)$.

2. On considère l'application : $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{C} \rightarrow E \\ a + ib\sqrt{3} \rightarrow M(a; b) \end{matrix}$

a. Montrer que la famille $B'(1, i\sqrt{3})$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

b. Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$ vers $(E, \times)$ puis en déduire la structure de $(E^*, \times)$.

3. Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif et déterminer l'inverse d'une matrice $M(a, b) \in E^*$

4. On pose $A = \frac{1}{2}(I + J)$. Déterminer tous les entiers naturels n tels que : $A^n = I$.

Exercice 14 : (Ex Nat 2018 Sess Nor)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

est un espace vectoriel réel. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

2. a. Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

b. On pose $J = M(0, 1)$. Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

3. a. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

b. Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

4. Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) :$

$$\varphi(x + iy) = M(x + y, -y) = \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ -y & x - y \end{pmatrix}$$

a. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

b. On pose $E^* = E - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

c. En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

5. Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 15 : Ex Nat rattrapage 2018

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \bullet)$ est un espace vectoriel réel. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

2. a. Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \bullet)$

b. Montrer que $\dim(E) = 2$

3. a. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

b. Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

4. On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$, $(\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2) : M(x, y) T M(x', y') = M(x, y) \times M(x', y') - M(y, 0) \times M(y', 0)$

Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : pour tout nombre complexe écrit sous forme algébrique $z = x + iy$: $\varphi(x + iy) = M(x, y)$

a. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), T)$.

b. Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans (E, T) .

c. On pose $E^* = E - \{0\}$. Montrer que (E^*, T) est un groupe commutatif.

5. a. Montrer que T est distributif par rapport à la loi $+$ dans E .

b. Montrer que $(E, +, T)$ est un corps commutatif.

Exercice 16 :

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / M \times J = J \times M\}$

Partie I :

1. a. Donner deux éléments de E .

b. Montrer que E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

c. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), J^n \in E$. (où $J^0 = I$).

d. Justifier que $\times$ est associative dans E et préciser son élément neutre.

2. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), J^{3n} = I$.

b. En déduire que J est inversible dans $(E, \times)$ et déterminer son inverse J^{-1} .

3. a. Quel est la structure de $(E, +, \times)$.

b. Montrer que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.

4. a. Montrer que $(E, +, \bullet)$ est un espace vectoriel réel.

b. Montrer que $B = (I, J, J^2)$ est une famille libre dans E .

Partie II :

On pose : $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, pour tout réels a, b et c .

1. Vérifier que $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3), M(a, b, c) \in E$.

2. a. Montrer que pour tout M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $M \in E \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / M = M(a, b, c)$

b. En déduire que $B = (I, J, J^2)$ est une base de E et préciser $\dim(E)$.

3. On pose : $A = I + J$, $B = I - J$ et $C = I + J + J^2$

a. Déterminer les coordonnées des vecteurs A , B et C dans la base B .

b. Montrer que $B = (A, B, C)$ est une base de E .

Exercice 17 :

On munit $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de deux lois $*$ et T définies par :

$$(\forall (x, y) \in I^2), x * y = \arctan(\tan x + \tan y)$$

$$(\forall (x, y) \in I^2), xTy = \arctan(\tan x \cdot \tan y)$$

1. a. Vérifier que $*$ est une loi de composition interne sur I et prouver que $*$ est commutative et associative sur I .

b. Montrer que $(I, *)$ est un groupe abélien.

2. a. Vérifier que T est une loi de composition interne sur I et prouver que T est commutative et associative sur I .

b. Montrer que $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$ est l'élément neutre dans (I, T)

c. Montrer que T est distributive par rapport à $*$ dans I .

d. Montrer que $(I, *, T)$ est un corps commutatif et préciser l'inverse d'un élément x de I^*

3. Soit l'application $\varphi : \begin{matrix} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \tan x \end{matrix}$

a. Montrer que :

- φ est un isomorphisme de $(I, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

- φ est un isomorphisme de (I, T) dans $(\mathbb{R}, \times)$.

b. $(\forall x \in I)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, on pose : $a^{(n)} = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}$. Calculer $a^{(n)}$

Exercice 18 : Ex Nat Sess juin 2011

On pose : $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$, Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et on considère l'ensemble $E = \{M(x,y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E est un sous-groupe du groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

2. a. Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

b. On pose $J = M(0,1)$. Démontrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

3. a. Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

b. Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

4. Soit l'application $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{C}^* \rightarrow E \\ x + iy \rightarrow M(x+y, -y) \end{matrix}$

a. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

b. On pose $E^* = E - \{O\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ $\phi(C *) = E *$.

c. En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

5. Montrer que $(E, +, \times)$ est corps commutatif.