guessmaths

<u>*Série d'exercices sur « les primitives et Intégrales »*</u> **Terminale S**

<u>Intégrale et aire</u>

<u>Exercice 1</u>

On considère la fonction affine f dont la courbe ci-contre passe par les points A et B.

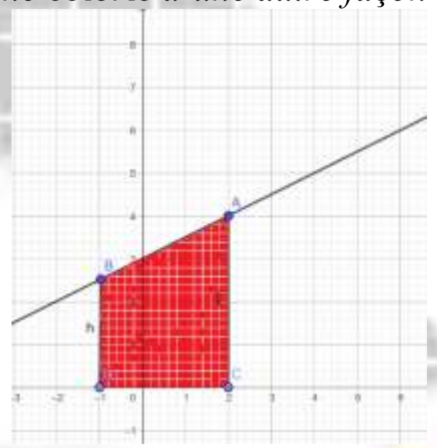
1) Déterminer l'expression de $f\left(x\right)$.

2) En déduire une primitive F de f.

3) a) Déterminer l'intégrale $\int_{-2}^{1} f\left(x\right)dx$ *à l'aide de F.*

En déduire l'aire du domaine colorié.

b) Déterminer l'aire du domaine colorié d'une autre façon



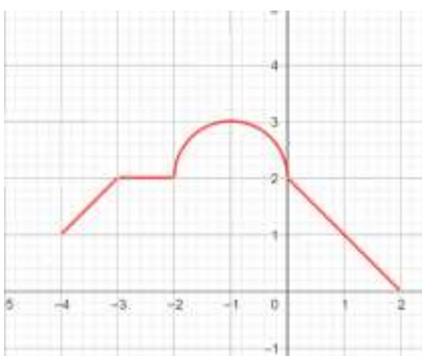
<u>Exercice 2</u>

On a tracé la courbe d'une fonction f définie sur $\left[-4;2\right]$.

Sur $\left[-2;0\right]$ *la courbe est un demi-cercle.*

1) Déterminer $\int_{-4}^{-2} f\left(x\right)dx$, *puis* $\int_{-2}^{0} f\left(x\right)dx$, *puis* $\int_{0}^{2} f\left(x\right)dx$

2) En déduire $\int_{-4}^{2} f\left(x\right)dx$



Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^{2}\left(2x^5-x^2-1\right)dx$ b) $\int_{0}^{-1}\left(1-x^2\right)\left(2+3x\right)dx$ c) $\int_{2}^{5}\frac{2}{3}dx$ d) $\int_{1}^{4}\frac{1}{n}dt$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+2x}dx\,x$ b) $\int_{1}^{e}\frac{6x^2+4x-1}{x}dx$ c) $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+x^3}dx$ d) $\int_{1}^{4}\frac{1}{3t}-\frac{3}{t^2}dt$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{0}^{1}\left(e^{-x}+\frac{6}{e^{2x}}\right)dx\,x$ b) $\int_{-1}^{2}xe^{-x^2}dx$ c) $\int_{0}^{4}\frac{3}{\sqrt{2x+1}}dx$

Exercice 6

Calcul intégrale avec un quotient de polynôme :

1) Etudier suivant les valeurs du réel x, le signe de x^2+2x+5.

2) En déduire la valeur de $\int_{-2}^{1}\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-4}^{-2}\left(x-1\right)dx$ b) $\int_{5}^{2}\frac{1}{2x+1}dx$ c) $\int_{-2}^{1}e^{2t-1}dt$

d) $\int_{0}^{1}\frac{x^2+x-1}{4}dx$ e) $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}dx$ f) $\int_{0}^{3}\frac{1}{\left(2x+1\right)^2}dx$ g) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x\right)dx$

h) $\int_{1}^{3}\frac{t^2-2t+3}{t}dt$

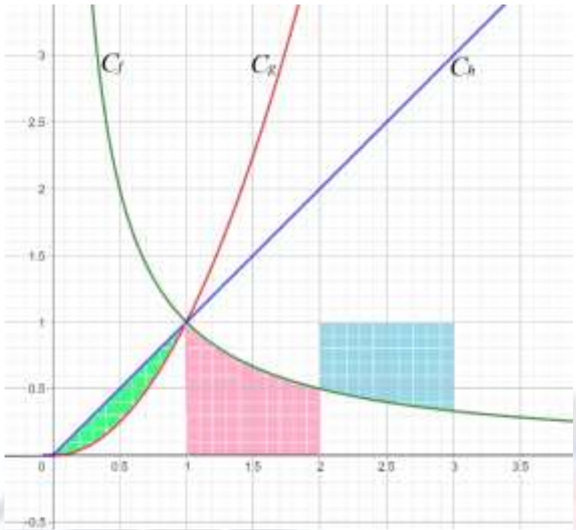
Exercice 8

On a tracé la courbe de la fonction f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ *par :* $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$.

On a tracé également les courbes des fonctions g et h définies sur $\left[0;+\infty\right[$ *par :* $g\left(x\right)=x^2$ *et* $h\left(x\right)=x$.

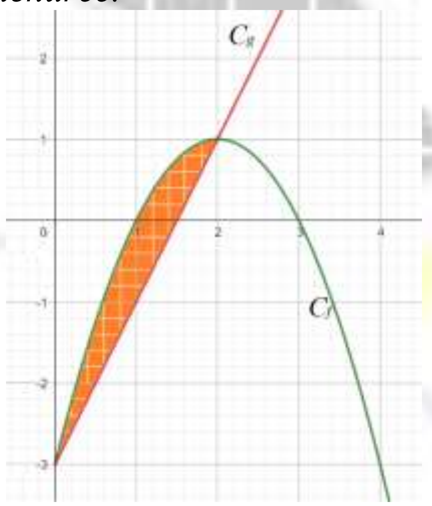
1) Déterminer l'aire du domaine rose.

2) Déterminer l'aire du domaine bleu.
3) Déterminer l'aire du domaine vert.



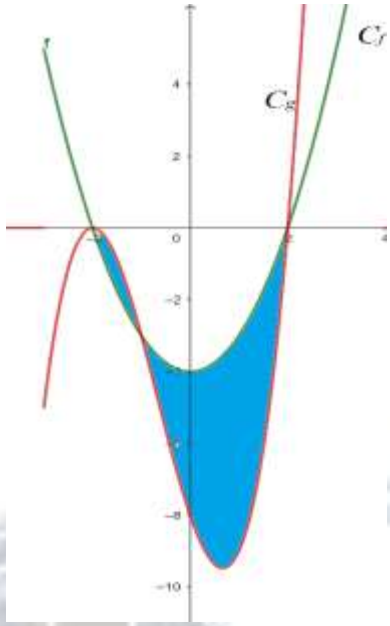
Exercice 9

On a représenté les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=(1-x)(x-3)$ *et* $g(x)=2x-3$.
Déterminer l'aire de la surface hachurée.



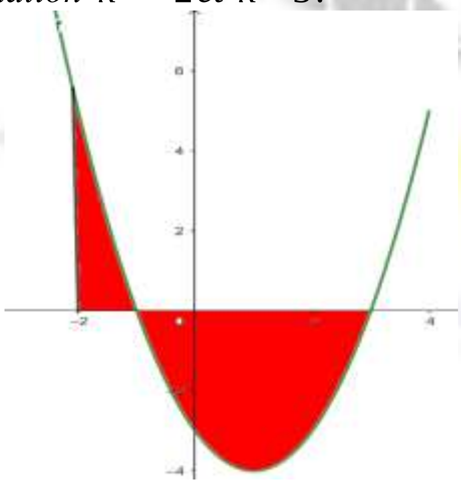
Exercice 10

C_f *et* C_g *sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*
$f(x)=x^2-4$ *et* $g(x)=(x+2)^2(x-2)$.
1) Etudier la position relative de leurs courbes représentatives.
2) En déduire l'aire A du domaine en unité d'aire compris entre les deux courbes sur l'intervalle $[-2;2]$.



Exercice 11

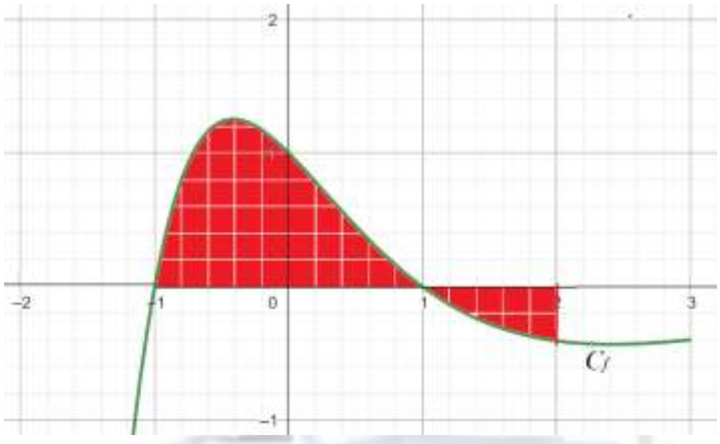
La courbe C représentée dans un repère orthogonal, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :*
$f\left(x\right)=x^2-2x-3$.
Les unités graphiques sont : 1*cm sur l'axe des abscisses et* 0.5*cm sur l'axe des ordonnées.*
1) Etudier la position relative de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.
2) En déduire l'aire A du domaine en unité d'aire puis en cm^2 *compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation* $x=-2$ *et* $x=3$.



Exercice 12

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f\left(x\right)=\left(1-x^2\right)e^{-x}$.
Dont on a tracé la courbe ci-dessous :
1) Déterminer a, b et c tels que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $F\left(x\right)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$
soit une primitive de f.

2) En déduire l'aire de la surface bleue.



Exercice 13

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-4		1		2		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

1) Déterminer le tableau de variations de F.

2) Déterminer le signe de l'intégrale $\int_1^3 f(t)dt$ et de $\int_1^{-5} f(t)dt$.

3) Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$.

Pour tout réel x, on pose : $I(x)=\int_3^x f(t)dt$.

1- Déterminer le signe de $I(x)$ en fonction de x, en justifiant.

2- a) Calculer $I(\alpha)$; où $\alpha>3$

b) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$

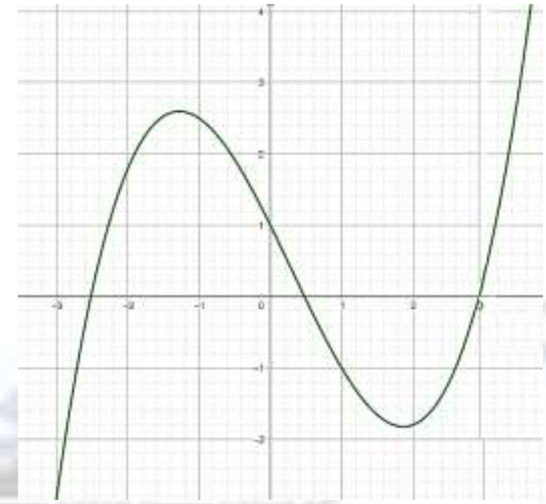
Exercice 15

Soit f une fonction définie $[-2;5]$ et F une primitive de f.

On a tracé la courbe de F ci-dessous :

1) Déterminer le tableau de signe de f sur $\left[-2;5\right]$.

2) Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_1^3 f\left(t\right)dt$.



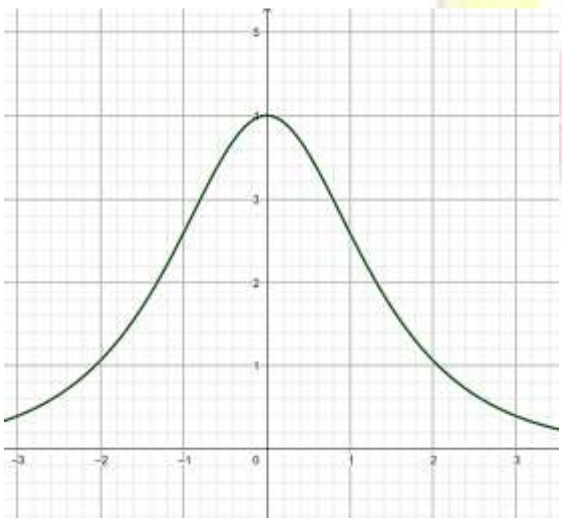
Exercice 16

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur R.

1) Comparer les intégrales $\int_0^1 f\left(x\right)dx$ *et* $\int_1^2 f\left(x\right)dx$

2) Comparer les intégrales $\int_{-2}^0 f\left(x\right)dx$ *et* $\int_0^2 f\left(t\right)dt\,x$.

3) Encadrer l'intégrale $\int_{-1}^2 f\left(t\right)dt$.



Suites et Intégrales

Exercice 1

$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; *On pose :* $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1) Montrer que la fonction F définie sur $[0;1]$ *par :* $F(x) = -(1+x)e^{1-x}$ *est primitive de la fonction une* $x \mapsto xe^{1-x}$ *sur* $[0;1]$

2) Calculer I_1

3) on admet que ; pour tout entier $n \geq 1$ *; on a :* $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

Calculer I_2

4) a) Montrer pour tout $n \geq 1$ *; on a :* $\left(\forall x \in [0;1]\right)$; $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

b) justifier que pour tout $n \geq 1$*; on a :* $\int_0^1 x^n.e\, dx = \frac{e}{n+1}$

c) En déduire que pour tout $n \geq 1$*;* $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$

1. Montrer que : $I_0 = \ln 2$.

1. a) Calculer $I_0 - I_1$

b) Déduire I_1.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*; on a :* $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$

Exercice 3

Soit (I_n) *la suite définie par :* $I_n = \int_1^e x\, dx$ *et pour tout entier* $n \geq 1$ *par :* $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1. Calculer I_0.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 1$*:* $2I_n + nI_{n-1} = e^{2\,2}$.

3. En déduire I_1.

4. Démontrer que la suite (I_n) *est décroissante.*

5. Déduire des questions 2. et 4. que pour tout entier $n \geq 1, \dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$

6. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$