Polynôme du second degré (Partie 2)

I. Résolution d'une équation du second degré

Définition :
Une **équation du second degré** est une équation de la forme
$ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :
L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition :
On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété :
Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:
$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

$a = 2$, $b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:
$a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.
Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Exercice : Démontrer ces deux formules.

II. Factorisation d'un trinôme

Démonstration au programme :

On a vu dans le chapitre "Second degré (partie 1)" que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc :

$ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

car a est non nul.

- Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

$$x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur ⁀ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

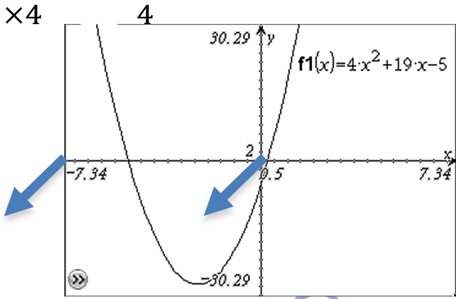
Méthode : Factoriser un trinôme

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

a) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:

Calcul du discriminant : Δ = 19^2 – 4 x 4 x (–5) = 441

Les racines sont : $x_1 = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4}$ = –5 et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4} = \frac{1}{4}$

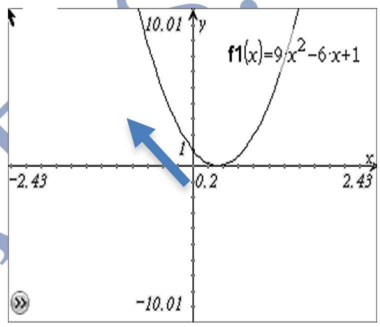


On a donc :

$4x^2 + 19x - 5 = 4\left(x - (-5)\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$

$= (x + 5)(4x - 1).$

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:



Calcul du discriminant : Δ = $(-6)^2$ – 4 x 9 x 1 = 0

La racine (double) est : $x_0 = -\frac{-6}{2\times9} = \frac{1}{3}$

On a donc :

$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2.$

<u>Exercice d'approfondissement pour aller plus loin :</u>

Résoudre l'équation (E) : $\frac{x-2}{2x^2-3x-2} - \frac{x^2}{2x^2+13x+6} = 0$

- On commence par factoriser les expressions $2x^2 - 3x - 2$ et $2x^2 + 13x + 6$.

Le discriminant de $2x^2 - 3x - 2$ est Δ = $(-3)^2$ – 4 x 2 x (–2) = 25 et ses racines sont :

$x_1 = \frac{3-\sqrt{25}}{2\times2} = \frac{-1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{25}}{2\times2} = 2$

On a donc : $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$.

Le discriminant de $2x^2 + 13x + 6$ est Δ' = 13^2 – 4 x 2 x 6 = 121 et ses racines sont :

$x_1' = \frac{-13-\sqrt{121}}{2\times2}$ = –6 et $x_2' = \frac{-13+\sqrt{121}}{2\times2} = \frac{-1}{2}$

On a donc : $2x^2 + 13x + 6 = 2(x + 6)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x + 6)(2x + 1)$.

- L'équation (E) s'écrit alors : $\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

Les valeurs –6, $\frac{-1}{2}$ et 2 annulent les dénominateurs. On résout alors (E) sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-6 ; -\frac{1}{2} ; 2\right\}$:

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

$\frac{x+6}{(2x+1)(x+6)} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

$\frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)} = 0$

$x + 6 - x^2 = 0$ car $x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq -6$.

Le discriminant de $-x^2 + x + 6$ est Δ'' = 1^2 – 4 x (–1) x 6 = 25.

Les racines sont : $x_1'' = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 3$ et $x_2'' = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -2$

Les solutions de l'équation (E) sont : –2 et 3.

III. Signe d'un trinôme

Remarque préliminaire :

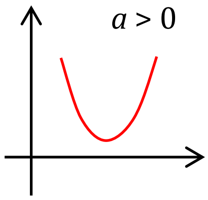
Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

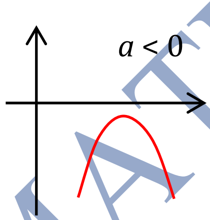
- si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : $\cup$
- si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : $\cap$

Propriété :
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$:

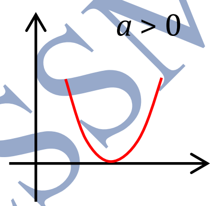
x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

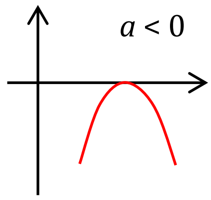




- Si $\Delta = 0$:

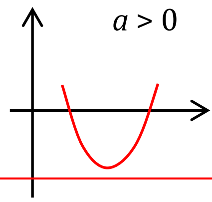
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

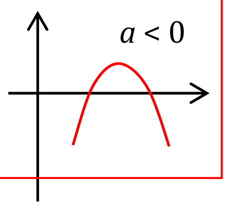




- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a





Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

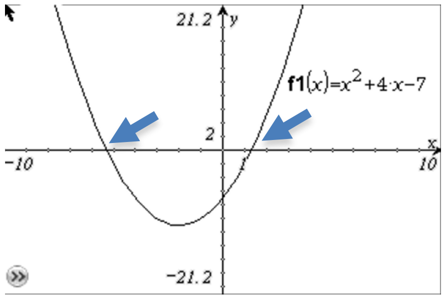
Résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$
On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$.

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :
$x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2 + \sqrt{11}$
On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	−	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+3x-5<-x+2$ est donc $\left]-2-\sqrt{11}\,;\,-2+\sqrt{11}\right[$.



Exercice d'approfondissement pour aller plus loin :

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$

$\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ équivaut à $\frac{1}{x^2-x-6} - 2 \geq 0$

Soit : $\frac{1}{x^2-x-6} - \frac{2(x^2-x-6)}{x^2-x-6} \geq 0$

Soit encore : $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0$

- On commence par déterminer les racines du trinôme x^2-x-6 :

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2\times 1} = -2$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2\times 1} = 3$

Les valeurs -2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;3\}$.

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$x_1' = \frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2' = \frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ est :

$$\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\,;\,-2\right[\cup \left]3\,;\,\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$$

IV. Application : position relative de deux courbes

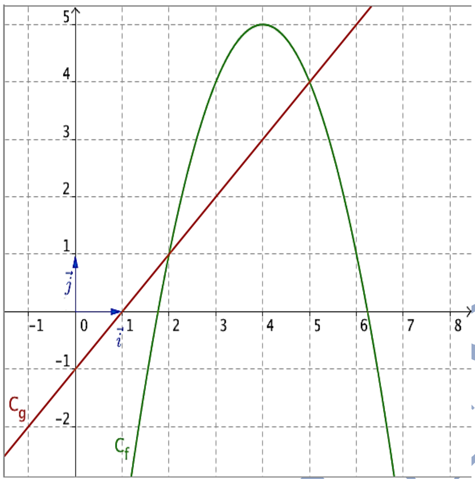
Méthode : Étudier la position de deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.
On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$:
$f(x) - g(x) = -x^2 + 8x - 11 - x + 1 = -x^2 + 7x - 10$.
Le discriminant du trinôme $-x^2 + 7x - 10$ est $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 9$
Le trinôme possède deux racines distinctes :
$x_1 = \frac{-7-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 5$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2$

On dresse le tableau de signes du trinôme $-x^2 + 7x - 10$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On conclut :
La courbe C_f est en-dessous de la courbe C_g pour tout x de $]-\infty\,;2] \cup [5\,;+\infty[$.
La courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g pour tout x de $[2\,;5]$.



www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com gsm : 0604488896