



guessmaths

Série n° 2 exercices « Etude de fonction logarithmique » 2ème Bac SM

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f , définie sur $[0; +\infty[$ par: $f_n(x) = x^n \ln x$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$

Soit (C_n) e, la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan (unité graphique: 5 cm)

PARTIE A

Etude de la fonction f_n

- 1) Etudier la limite de f_n en $+\infty$
- 2) Montrer que f_n est continue sur $[0; +\infty[$
- 3) f_n est-elle dérivable en 0?
Interpréter géométriquement le résultat
- 4) Etudier les variations de f , sur $[0; +\infty[$
- 5) Dresser le tableau de variation de f , sur $[0; +\infty[$
- 6) Déterminer le point d'intersection, noté I_n , de (C_n) et de l'axe des abscisses, I_n distinct de O , ainsi que l'équation réduite de la droite T_n tangente à (C_n) en I_n
- 7) Tracer la courbe (C_1) et sa tangente T .

PARTIE B

Etude de la fonction f_n pour $n = 2$

- 1) Etudier la limite de f_n en $+\infty$.
- 2) Démontrer que f_n est continue sur $[0; +\infty[$
- 3) Démontrer que f_n est dérivable en 0 et calculer $f_n'(0) = 0$. Interpréter géométriquement le résultat.
- 4) Etudier les variations de f_n sur $[0; +\infty[$
- 5) Dresser le tableau de variation de f_n sur $[0; +\infty[$
- 6) Déterminer le point intersection, note I_n de (C_n) et de l'axe des abscisses, I_n distinct de O , et démontrer que la droite T déterminée dans la partie A est tangente à (C_n) en I_n .

PARTIE C

Etude des positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}) et construction de (C_2)

- 1) Etudier le signe de $f_{n+1} - f_n$ sur $[0; +\infty[$
Interpréter géométriquement le résultat.
- 2) Tracer la courbe (C_2) sur le même repère que (C_1) .

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$:

- 1) Soit h la fonction définie sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ par : $h(x) = 2x - \tan x$ Etudier les variations de h sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ et en

déduire que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] ; 0 \leq \tan x \leq 2x$.

2) Soit φ la fonction définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = \ln(\cos x) + \frac{x^2}{2}$.

a) Justifier que la fonction φ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée φ' .

b) Justifier que la fonction φ' est dérivable sur I et montrer que pour tout x appartenant à I ,
 $\varphi''(x) = -\tan^2 x$.

c) Etudier les variations de φ' sur I .

d) En déduire le signe de φ' sur I puis les variations et le signe de φ sur I (on pourra calculer $\varphi'(0)$ et $\varphi(0)$)

3) Soit ψ la fonction définie sur $J = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $\psi(x) = \varphi(x) + \frac{x^4}{3}$

a) Justifier que la fonction ψ est dérivable sur J et déterminer sa dérivée ψ' .

b) Justifier que la fonction ψ' est dérivable sur J et démontrer que pour tout x appartenant à J ,
 $\psi''(x) = 4x^2 - \tan^2 x$

c) Etudier les variations de ψ' sur J

d) En déduire le signe de ψ' sur J , puis les variations et le signe de ψ sur J

5) Déduire des résultats précédents un encadrement de $\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ pour tout réel x non nul appartenant à J ;
puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

EXERCICE 3

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

1. Etudier le sens de variation de g

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$

Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$

On note C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm) .

1. Etudier les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$

En déduire le signe de $f'(x)$

3. Dresser le tableau de variation de f et montrer que : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

4. Tracer la courbe C_f et préciser la tangente à C_f au point d'abscisse 1

PARTIE C

1. a) Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2. Soit F la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2$.