Exercice 27

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $\begin{cases} f(x)=x^x & ;x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- *Étudier la continuité de f à droite en 0.*

3- *a. Vérifier que :* $(\forall x\in]0;1[)$; $\dfrac{f(x)-1}{x}=\left(\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\right)\ln x$.

b. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4- *a. Montrer que :* $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=f(x)(1+\ln x)$.

b. En déduire le tableau de variations de f.

5- *Déterminer la branche infinie de la courbe* (C).

6 - *Tracer la courbe* (C).

Solution

$$\begin{cases} f(x)=x^x & ;x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1) *Calculons :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^x$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x}=+\infty \qquad (\text{Car } \lim_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty)$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) *Etudions la continuité de la fonction f à droite en 0:*

On a: $f(0)=1$

Calculons: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x^x$

$$=\lim_{x\to0^+} e^{x\ln x}=1 \qquad (\text{Car } \lim_{x\to0^+} x\ln x=0)$$

Donc: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

d'où : f est continue à droite en 0.

3) *a. On a :* $(\forall x\in]0;1[)$ $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x}$

$$=\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\right)\times\ln x$$

b. Etudions la dérivabilité de f a droite en 0:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\right)\times\ln x=-\infty$$

(Car $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\right)=1$ *; on pose* $t=x\ln x$ *donc* $x\to0^+\Rightarrow t\to0^+$ *et* $\lim_{t\to0^+}\left(\frac{e^{t}-1}{t}\right)=1$*)*

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique:

La courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point $A(0;1)$ *.*

4) a. Montrons que: $(\forall x>0)$ *;* $f'(x)=f(x)(1+\ln x)$

Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$ *, on a:* $\boldsymbol{f}(x)=e^{x\ln x}$

La fonction: $u:x\mapsto x\ln x$ *est dérivable sur* $\left]0;+\infty\right[$ *, donc, la fonction* $x\mapsto e^{x\ln x}$ *est dérivable sur* $\left]0;+\infty\right[$ *et*

on a: $\boldsymbol{f}'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=(x\ln x)'\times e^{x\ln x}$

$$=\left(\ln x+\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}\right)e^{x\ln x}$$

$$=(\ln x+1)e^{x\ln x}$$

$$=(\ln x+1)\times f(x)$$

Donc : $(\forall x>0)$ *;* $f'(x)=f(x)(1+\ln x)$

Le signe de $f'(x)$ *est celui de* $(1+\ln x)$

Donc le tableau de variations de f est le suivant

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗	$+\infty$

5) Déterminons la branche infinie de la courbe de f

On a: $\lim_{x\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=+\infty$ *, calculons* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln x}}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln x}}{x\ln x}\times\ln x$$

$$=+\infty$$

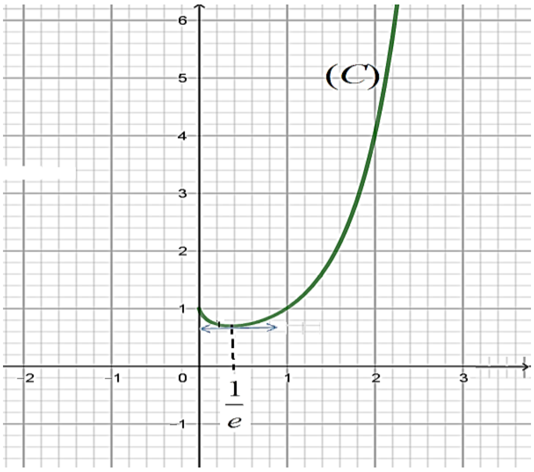
(Car $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x\ln x}}{x\ln x}\right)=+\infty$ *; on pose* $t=x\ln x$ *donc* $x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty$ *donc* $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{t}}{t}\right)=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ *)*

D'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty}$

Alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ *.*

6) La courbe de la fonction f:

$$\left(\frac{1}{e}\approx0.4\ ;e^{-\frac{1}{e}}\approx0.7\right)$$


(C)
$\frac{1}{e}$