Exercice 1:

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0}\left(\cos\left(\frac{\pi\tan x}{3x}\right)\right)$

2) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)\right)$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}\right)\right)$

Solution :

1) *On a :* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi\tan x}{3x}\right)=\frac{\pi}{3}$ *et la fonction* $x\mapsto\cos(x)$ *est continue en* $\frac{\pi}{3}$

Alors $\lim_{x\to 0}\left(\cos\left(\frac{\pi\tan x}{3x}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

2) *On a :* $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi x^2}{4x^2}\right)=\frac{\pi}{4}$

et la fonction $x\mapsto\sin(x)$ *est continue en* $\frac{\pi}{4}$

Donc $\lim_{x\to +\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) *On a :* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\frac{1-\cos x}{x^2}}\right)$ *et* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$

Alors $\lim_{x\to0}\left(\frac{2x^2}{1-\cos x}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ *; la fonction* $x\mapsto\sqrt{x}$ *est continue en* 4

Donc $\lim_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}\right)=\sqrt{4}=2$

et la fonction $x\mapsto\sin(x)$ *est continue en* 2

par suite $\lim_{x\to0}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}\right)\right)=\sin(2)$

Exercice 2:

Montrer que l'équation : $4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$ *admet une racine dans chacune des intervalles suivants :* $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ *;* $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ *et* $]0;1[$

Solution :

On considère la fonction g tel que $g(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$

g est continue sur $\mathbb{R}$ *(car c'est une fonction polynôme) ; donc continue sur tout intervalle de* $\mathbb{R}$

- *On a :* $g(-1)=-\frac{3}{2}$ *et* $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ *donc :* $g\left(-\frac{1}{2}\right)\times g(-1)<0$

  d'après le (T.V.I) il existe $\alpha_1\in\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ *tel que :* $g(\alpha_1)=0$

- *On a :* $g(0)=-\frac{1}{2}$ *et* $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ *donc :* $g\left(-\frac{1}{2}\right)\times g(0)<0$

  d'après le (T.V.I) il existe $\alpha_2\in\left]-\frac{1}{2};0\right[$ *tel que :* $g(\alpha_2)=0$

- *On a :* $g(0)=-\frac{1}{2}$ *et* $g(1)=\frac{1}{2}$ *donc :* $g(0)\times g(1)=\frac{1}{2}<0$

d'après le (T.V.I) il existe $\alpha_3 \in]0;1[$ *tel que :* $g(\alpha_3)=0$

donc l'équation : $4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$ *admet 3 racines différentes dans chacune des intervalles:* $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ *et* $]0;1[$

Exercice 3 :

1) *Montrer que l'équation :* $x^3+x+1=0$ *admet une racine unique dans* $]-1;0[$

2) *Etudier le signe de* (x^3+x+1) *sur* $]-1;0[$.

Solution :

1) On considère la fonction h tel que : $h(x)=x^3+x+1$

• On a : h est continue sur (*car c'est une fonction polynôme*) donc continue sur $]-1;0[$

• On a : $h(-1)=-1$ et $h(0)=1$ donc : $h(-1)\times h(0)<0$

• $h'(x)=3x^2+1>0$ Sur $]-1;0[$ donc h est strictement croissante sur $]-1;0[$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation $h(x)=0$ *admet une solution unique dans* $]-1;0[$

2) h est strictement croissante sur $]-1;0[$

Donc pour $x\in]-1;\alpha[$; on a : $h(x)<h(\alpha)$ et $h(\alpha)=0$; *d'où* $h(x)<0$

Donc pour $x\in]\alpha;0[$; on a : $h(x)>h(\alpha)$ et $h(\alpha)=0$; *d'où* $h(x)>0$

Conclusion : x^3+x+1 *est négatif sur* $[-1;\alpha]$; *et positif sur* $[\alpha;0]$

Exercice 4 :

Montrer que l'équation $\cos x=x$ *admet au moins une racine dans intervalle :* $I=[0;\pi]$

Solution :

On a : $\cos x=x \Leftrightarrow \cos x-x=0$

On pose : $f(x)=\cos x-x$

$\bullet$ *On a : f est continue sur* $\mathbb{R}$ *(car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur* I

$\bullet$ *On a :* $f(\pi) = -(1+\pi)$ *et* $f(0) = 1$ *donc :* $f(0) \times f(\pi) < 0$

Donc : d'après le (T.V.I) il existe $\alpha \in]0;\pi[$ *tel que :* $f(\alpha) = 0$ *càd* $\cos\alpha = \alpha$

Exercice 5 :

Montrer que l'équation : $1+\sin x = x$ *admet au moins une racine dans intervalle :* $\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

Solution :

$1+\sin x = x \Leftrightarrow 1+\sin x - x = 0$

On pose : $g(x) = 1+\sin x - x$

$\bullet$ *On a : g est continue sur* $\mathbb{R}$ *(car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur* $\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

$\bullet$ *On a :* $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$ *et* $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{2\pi}{3} < 0$ *donc :* $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \times g\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$

Donc : d'après le (T.V.I) il existe $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right[$ *tel que :* $g(\alpha) = 0$ *càd* $1+\sin\alpha = \alpha$