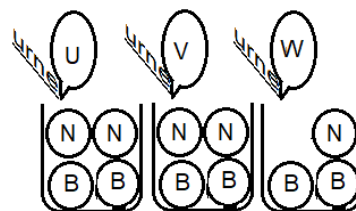


Exercice 1

1) Par tirer de l'urne U il faut d'abord tirer une boule Blanche de

l'urne W ; donc : $P_{(\text{tirer de U})} = \frac{2}{3}$



2) La probabilité d'obtenir 2 boules Blanches à la fin de l'expérience de réalisation si

- On tire une boule Blanche de l'urne W puis 2 boules blanches de l'urne U, ou tire une boule Noire de l'urne W puis 2 boules Blanches de l'urne V d'où :

$$\begin{aligned} P_{(2\text{boules B})} &= \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

3) Loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On a : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

$$P(X=1) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{18}{30}$$

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{5}{30}$$

D'après question 2) $P(X=2) = \frac{7}{30}$

D'où la loi de probabilité de X.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{7}{30}$

Exercice 2

$(\forall n \in \mathbb{N}) c_n = 2 \cdot 10^n - 1$ et $b_n = 2 \cdot 10^n + 1$.

1) On a : $b_n = c_n \times 1 + 2$ et $0 < 2 < c_n$ (car : $n \geq 1$)

Alors, d'après l'Algorithme d'Euclide : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$

Et comme c_n est impair ; alors : $c_n \wedge 2 = 1$

Donc : $b_n \wedge c_n = 1$

On en déduit que b_n et c_n sont premiers entre eux.

On conclut : $c_n \wedge 2 = 1$ et $b_n \wedge c_n = 1$

2) Comme $b_n \wedge c_n = 1$; alors d'après le théorème de Bézout :

$$\exists (x_n; y_n) \in \mathbb{Z}^2 / b_n x_n + c_n y_n = 1.$$

D'après l'algorithme d'Euclide, on a :

$$\begin{cases} b_n = c_n + 2 \\ c_n = 2(10^n - 1) + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = c_n - 2(10^n - 1)$$

$$\Rightarrow 1 = c_n - (b_n - c_n)(10^n - 1)$$

$$\Rightarrow 1 = c_n \cdot 10^n + (1 - 10^n) \cdot b_n = b_n \cdot (1 - 10^n) + c_n \cdot 10^n$$

On déduit que : $\boxed{x_n = 1 - 10^n}$ et $\boxed{y_n = 10^n}$.

Exercice 3 :

I. $\forall (a; b) \in (]-1; 1[)^2 ; a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

1) a) Soit $(a; b) \in (]-1; 1[)^2$

• On a : $\begin{cases} -1 < a < 1 \\ -1 < b < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 \\ |b| < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow |ab| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < ab < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 + ab < 2$$

Donc : $\forall (a; b) \in (]-1; 1[)^2 ; 1 + ab > 0$

• On a : $a * b - 1 = \frac{a+b}{1+ab} - 1$

$$= \frac{(a-1)(1-b)}{1+ab}$$

Donc : $a * b - 1 < 0$ (car $a-1 < 0 ; 1-b > 0$ et $1+ab > 0$)

D'où : $a * b < 1$

• On a : $a * b + 1 = \frac{a+b}{1+ab} + 1$

$$= \frac{(a+1)(b+1)}{1+ab}$$

Donc : $a * b + 1 > 0$ (car $a+1 > 0 ; b+1 > 0$ et $1+ab > 0$)

D'où : $-1 < a * b$

On en déduit que : $(\forall (a; b) \in J^2) ; -1 < a * b < 1$

Donc $(\forall (a; b) \in J^2) (a * b) \in J$.

d'où : * est une loi de composition interne dans J.

2) a) Montrons que la loi * est commutative et Associative dans J.

- On a : pour tout $(x;y) \in J^2$:

$$\begin{aligned}x * y &= \frac{x+y}{1+xy} \\&= \frac{y+x}{1+yx} \\&= y * x\end{aligned}$$

Donc la loi * est commutative dans J.

- On a : pour tout $(x;y;z) \in J^3$:

$$\begin{aligned}\neg (x * y) * z &= \frac{x+y}{1+xy} * z \\&= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \times z} \\&= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg x * (y * z) &= x * \frac{y+z}{1+yz} \\&= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \times \frac{y+z}{1+yz}} \\&= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}\end{aligned}$$

Donc $(x * y) * z = x * (y * z)$

D'où : la loi * est associative dans J.

Conclusion : la loi * est commutative et associative dans J.

5) Déterminons l'élément neutre e pour * dans J.

tel que $(\forall x \in J) ; x * e = x$.

- Pour tout $x \in J$; on a :

$$x * e = \frac{x+e}{1+x.e} = x \Leftrightarrow x+e = (1+x.e).x$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2).e = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 0 \text{ (car } x \in J =]-1;1[\text{ et par suite } 1-x^2 \neq 0)}$$

Puisque * est commutative on a donc : $x * 0 = 0 * x = x$

Et comme $0 \in J$, alors : 0 est l'élément neutre pour la loi * dans J.

c) Montrons que $(J ; *)$ est un groupe commutatif.

On a : la loi $*$ est commutative et associative et admet un élément neutre 0 dans J.

Reste à montrer que tout élément de J est symétrisable dans J pour la loi $*$

Soit $x \in J$. Cherchons x' de J tel que : $x * x' = x' * x = 0$

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x + x'}{1 + x.x'} = 0$$

$$\Leftrightarrow x' = -x$$

Comme $x \in]-1; 1[$ alors $-x \in]-1; 1[$ et $*$ est une loi commutative dans J ; donc :

$$(\forall x \in J)(\exists x' = -x \in J) : x * x' = x' * x = 0$$

Donc tout $x \in J$ admet un symétrique $x' = -x$ dans J par la loi $*$.

Conclusion :

$(J ; *)$ est un groupe commutatif.

II- f est une application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1) Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers J.

Soit $y \in J$; Résolvons l'équation : $f(x) = y$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{y-1}$$

Et comme $y \in]-1; 1[$, alors $\frac{y+1}{y-1} > 0$

$$\text{Donc : } f(x) = y \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

Ainsi : $(\forall y \in J)(\exists x \in \mathbb{R}) : f(x) = y$

On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers J.

Remarque : On peut montrer que f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans

$f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$, et on déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans J.

2) $\perp$ une loi définie dans J par :

$$(\forall (x; y) \in J^2) : x \perp y = f(g(x) \times g(y)) \quad (g \text{ est la bijection réciproque de } f)$$

Montrons que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^* ; \times)$ vers $(J^* ; \perp)$ ($J^* = J - \{0\}$)

$$\text{Soit } (x; y) \in (\mathbb{R}^*)^2. \text{ On a : } f(x) \perp f(y) = f(g(f(x)) \times g(f(y)))$$

Comme g est la bijection réciproque de f alors $g(f(x)) = x$ et $g(f(y)) = y$

$$\text{Donc : } f(x) \perp f(y) = f(x \times y)$$

D'où f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^* ; \times)$ vers $(J^* ; \perp)$.

2) Montrons que $(J; *, \perp)$ est un corps commutatif.

On a $(J; *)$ est un groupe commutatif d'élément neutre 0.

On a f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*; \times)$ vers $(J^*; \perp)$; et $(\mathbb{R}^*; \cdot)$ est un groupe Commutatif donc $(f(\mathbb{R}^*); \perp)$ est un groupe Commutatif

Or f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans J , alors $f(\mathbb{R}) = J$

Et comme $f(0)=0$ ($0 \in \mathbb{R}$ et $0 \in J$), alors $f(\mathbb{R}^*) = J^*$.

Par suite $(J^*; \perp)$ est un groupe Commutatif

Et on a $\perp$ est distributive par rapport à $*$ dans J .

Donc : $(J; *, \perp)$ est un corps commutatif.

Exercice 4

I- 1) Résolvons l'équation : $z^2 + i = 0$.

On a : $z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2}(1-i)^2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

Comme a est la solution de l'équation qui vérifie $\text{Re}(a) > 0$; alors : $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$2) a) a = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc : } 1+a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1 + e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{8}} \left(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}} \right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ alors ; $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

On déduit que : $|1+a| = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg(1+a) = -\frac{\pi}{8} [2\pi]$

b) D'après la question précédente on a : $|1+a| = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$\text{Donc : } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}|1+a|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

Donc: $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

c) On a : $(1+a)(1-a) = 1-a^2 = 1-(-i) = 1+i$

• D'après ce qui précède ; on a :

On a : $1-a = \frac{1+i}{1+a}$; donc :

$$\begin{aligned} \neg |1-a| &= \left| \frac{1+i}{1+a} \right| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg \arg(1-a) &\equiv \arg\left(\frac{1+i}{1+a}\right) [2\pi] \\ &\equiv (\arg(1+i) - \arg(1+a)) [2\pi] \\ &\equiv \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) [2\pi] \\ &\equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi] \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{1-a = \sqrt{2-\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \right)}$

Remarque : On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} 1-a &= \frac{1+i}{1+a} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{\pi}{8}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \right) \end{aligned}$$

II- $A(a); B(-a); M(z); M'(z')$ et $N(\bar{z})$ tel que : $zz' + i = 0$

1) Montrons que des droites (ON) et (OM') sont perpendiculaires.

$$\begin{aligned}\frac{z'}{\bar{z}} &\equiv \frac{zz'}{\bar{z}\bar{z}} [2\pi] \\ &\equiv \frac{-i}{|z|^2} [2\pi]\end{aligned}$$

$$\text{Alors : } \arg\left(\frac{z'}{\bar{z}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \left(\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Par suite les droites (ON) et (OM') sont perpendiculaires.

2) a) Montrons que : $z' - a = i \frac{z-a}{az}$

$$\begin{aligned}\text{On a : } z' - a &= -\frac{i}{z} - a \\ &= \frac{-i - az}{z} \\ &= \frac{-ia - a^2z}{az} \\ &= \frac{-ia + iz}{az} \quad (\text{car } a^2 = -i) \\ &= i \frac{z-a}{az}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{z' - a = i \frac{z-a}{az}}$$

$$\begin{aligned}\text{b) On a : } z' + a &= z' - a + 2a \\ &= i \frac{z-a}{az} + 2a \\ &= \frac{iz - ia + 2a^2z}{az} \\ &= \frac{iz - ia - 2iz}{az} \quad (\text{car } a^2 = -i) \\ &= -i \frac{z+a}{az}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } z' + a = -i \frac{z+a}{az}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où : } z \neq -a &\Rightarrow z+a \neq 0 \\ &\Rightarrow z' + a \neq 0 \\ &\Rightarrow z' \neq -a\end{aligned}$$

Par suite : $z \neq -a \Rightarrow z' \neq -a$.

$$\text{On a : } z' + a = -i \frac{z+a}{az} \text{ et } z' - a = i \frac{z-a}{az}$$

$$\text{Donc : } \frac{z' - a}{z' + a} = \frac{i \frac{z - a}{az}}{-i \frac{z + a}{az}} = - \frac{z - a}{z + a}$$

$$\text{Càd : } \frac{z' - a}{z' + a} = - \frac{z - a}{z + a}$$

3) On suppose que les points A ; B et M ne sont pas alignés , alors $z \neq -a$ donc $z' \neq -a$.

D'où les points A; B; M et M' ne sont pas alignés .

Donc : A ; B ; M et M' sont cocycliques est équivalent à $\frac{z' - a}{z - a} \times \frac{z + a}{z' + a} \in \mathbb{R}$.

Et d'après (2-b) : $\frac{z' - a}{z' + a} = - \frac{z - a}{z + a}$ donc $\frac{z' - a}{z - a} \times \frac{z + a}{z' + a} = -1$

Donc $\frac{z' - a}{z - a} \times \frac{z + a}{z' + a} \in \mathbb{R}$

D'où les points A; B; M et M' sont cocycliques.

Exercice 5 :

f est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

1) On a : •) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$)

$$\begin{aligned} \bullet) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-2 \ln t}{t} = 0 \quad (\text{On pose } t = \sqrt{x}) , \quad (\text{car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0) \end{aligned}$$

Interprétation Géométrique

- la courbe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

- la courbe de f admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale

2) La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$;

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$, donc f est dérivable sur

$$\begin{aligned}]0; +\infty[\text{ et pour tout } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) &= \frac{-\frac{1}{x} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} \\ &= \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); \boxed{f'(x) = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}}$

• $f'(x)$ est du même signe que $\ln x - 2$

$$\ln x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^2$$

Donc $\bullet f'(x) \geq 0$ pour $x \in [e^2; +\infty[$

$\bullet f'(x) \leq 0$ pour $x \in]0; e^2]$

Par suite f est strictement croissante sur $[e^2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; e^2]$.

3) La fonction g_n est définie sur $]0; 1[$ par : $g_n(x) = f(x) - x^n$; où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrons que g_n est strictement décroissante sur $]0; 1[$.

Les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto -x^n$ sont dérivables sur $]0; 1[$; donc g_n est dérivable sur $]0; 1[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; 1[$, et pour tout $x \in]0; 1[$ on a :

$$g'_n(x) = f'(x) - nx^{n-1}$$

(Comme $f'(x) \leq 0$ sur $]0; 1[$ ($]0; 1[\subset]0; e^2]$) et $-nx^{n-1} < 0$)

Alors : $(\forall x \in]0; 1[) ; g'_n(x) < 0$

Par suite g_n est strictement décroissante sur $]0; 1[$.

b) Montrons que : $(\exists ! \alpha_n \in]0; 1[) : f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$

g_n est continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$; donc g_n est une bijection de

$$]0; 1[\text{ vers } g_n(]0; 1[) \text{ et : } g_n(]0; 1[) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g_n ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n =]-1; +\infty[$$

Comme $0 \in]-1; +\infty[$ alors l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0; 1[$;

càd : $(\exists ! \alpha_n \in]0; 1[) : g_n(\alpha_n) = 0$.

Donc : $(\exists ! \alpha_n \in]0; 1[) : f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$

c) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; g_n(\alpha_{n+1}) < 0$.

$$\text{On a : } f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } g_n(\alpha_{n+1}) &= (\alpha_{n+1})^{n+1} - (\alpha_{n+1})^n \\ &= (\alpha_{n+1})^n (\alpha_{n+1} - 1) \end{aligned}$$

Comme $\alpha_{n+1} \in]0; 1[$; donc : $(\alpha_{n+1})^n > 0$ et $(\alpha_{n+1} - 1) < 0$

Par suite $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; g_n(\alpha_{n+1}) < 0$.

d) Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; g_n(\alpha_{n+1}) < 0$ et $g_n(\alpha_n) = 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$

Comme g_n est une bijection strictement décroissante sur $]0; 1[$; alors g_n^{-1} est aussi strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$; donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; g_n^{-1}(g_n(\alpha_{n+1})) > g_n^{-1}(g_n(\alpha_n))$$

$$\text{D'où : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_{n+1} > \alpha_n$$

Par suite la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Conclusion :

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1 ; alors elle est convergente.

4) a) Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

Vérifions que : $0 < \alpha_1 \leq \ell \leq 1$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < \alpha_n < 1$ donc $0 \leq \ell \leq 1$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n \geq \alpha_1$.

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell \geq \alpha_1$; Donc ℓ vérifie $0 < \alpha_1 \leq \ell \leq 1$.

b) Montrons que : $h(\alpha_n) = n$.

On a pour tout $x \in]0;1[$; $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$ et $\alpha_n \in]0;1[$ donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln \alpha_n}$$

$$\text{Comme } \forall x > 0 ; f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Alors : } (\alpha_n)^n = f(\alpha_n) = \frac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}} \Rightarrow -\ln(\alpha_n) = (\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; h(\alpha_n) &= -\frac{1}{2} + \frac{\ln\left((\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}\right)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{\ln(\alpha_n)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2} + n + \frac{1}{2} = n \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; h(\alpha_n) = n}.$$

Remarque : On peut aussi faire un raisonnement par équivalence successive comme suit :

$$f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n \Leftrightarrow \frac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}} = (\alpha_n)^n$$

$$\Leftrightarrow -\ln(\alpha_n) = \sqrt{\alpha_n} (\alpha_n)^n$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(\alpha_n)) = \ln(\sqrt{\alpha_n} (\alpha_n)^n)$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(\alpha_n)) = \ln(\sqrt{\alpha_n}) + \ln((\alpha_n)^n)$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(\alpha_n)) = \frac{1}{2} \ln(\alpha_n) + n \ln(\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = n$$

$$\Leftrightarrow h(\alpha_n) = n$$

c) Montrons que : $\ell = 1$.

Par l'absurde, supposons que $\ell \neq 1$; alors $0 < \ell < 1$ (car $0 < \alpha_1 \leq \ell \leq 1$, d'après 4-a).

Et comme h est continue sur $]0;1[$ (donc en ℓ) ; alors :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = h(\ell)$; ce qui est absurde ; Car $h(\alpha_n) = n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

D'où : $\ell = 1$

d) Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$ et $(\alpha_n)^n = \frac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}}$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}}$

La fonction $u : x \mapsto \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$ donc en 1, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u(\alpha_n) = u(1) = 0$$

Par suite : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0}$

II- 1) Etudions le signe de l'intégrale : $\int_x^1 f(t) dt$ ($x \in \mathbb{R}_+^*$)

On a : •) Soit $0 < x \leq 1$ et soit $t \in [x;1]$, alors $\ln t \leq 0$, d'où $f(t) \geq 0$

La fonction f étant continue sur $[x;1]$, donc $\int_x^1 f(t) dt \geq 0$

•) Soit $x \geq 1$ et soit $t \in [1;x]$, alors $\ln t \geq 0$, d'où $f(t) \leq 0$

La fonction f étant continue sur $[1;x]$, donc $\int_1^x f(t) dt \leq 0$, d'où $-\int_1^x f(t) dt \geq 0$

Alors $\int_x^1 f(t) dt \geq 0$

Conclusion

$(\forall x \in]0;+\infty[) ; \int_x^1 f(t) dt > 0$.

b) Montrons que pour $x \in]0;+\infty[: \int_x^1 f(t) dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$.

Faisons une intégration par parties :

On pose :
$$\begin{cases} u(t) = -\ln t & \rightarrow u'(t) = -\frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} & \rightarrow v(t) = 2\sqrt{t} \end{cases}$$

U et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$, u' et v' sont continues sur $]0;+\infty[$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_x^1 f(t)dt &= \int_x^1 \frac{-\ln(t)}{\sqrt{t}} dt \\
&= \left[-2\sqrt{t} \ln(t) \right]_x^1 - \int_x^1 \left(-2\sqrt{t} \times \frac{1}{t} \right) dt \\
&= 2\sqrt{x} \ln(x) + 2 \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\
&= 2\sqrt{x} \ln(x) + 2 \left[2\sqrt{t} \right]_x^1 \\
&= 2\sqrt{x} \ln(x) + 2(2 - 2\sqrt{x}) \\
&= 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln(x)
\end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \boxed{\int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x}$.

c) Soit S l'aire de la partie limitée par la courbe (C); l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$.

Alors : $S = \int_1^{e^2} |f(x)| dx$ (u.a) $= -\int_{e^2}^1 -f(x) dx$ (u.a) (car $f(x) \leq 0$ sur $[1; e^2]$), donc

$$\begin{aligned}
S &= \left[4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln(x) \right]_1^{e^2} \text{ (u.a)} \\
&= \left(4 - 4\sqrt{e^2} + 2\sqrt{e^2} \ln e^2 \right) \text{ (u.a)} \\
&= (4 - 4e + 4e) \text{ (u.a)} \\
&= 4 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose : $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) f est continue et strictement décroissante sur $]0;1]$ et $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right] \subset]0;1]$; donc f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$; d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} &\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx
\end{aligned}$$

$$\text{On a : } \bullet) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx = \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$\bullet) f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx = \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n-1$; on a :

$$\boxed{\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

b) D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; et $1 \leq k \leq n-1$:

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ donc } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et on a $f(1)=0$; donc :

$$\bullet) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = U_n$$

$$\begin{aligned} \bullet) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= U_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\bullet) \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx \quad (\text{Relation de Chasles})$$

$$\text{On en déduit que : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; U_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx \leq U_n$$

$$\text{Donc : } U_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx \text{ et } \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx \leq U_n$$

$$\text{Alors : } \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx \leq U_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$$

$$\text{c) D'après la question b) , on a : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx \leq U_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$$

Et d'après (II-1-b), on a : pour $x \in]0; +\infty[: \int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$, donc :

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx = 4 - \frac{4}{\sqrt{n}} - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx = 4$$

$$\text{De plus : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx = 4$$

$$\text{Donc : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4}.$$

Exercice 6 :

g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt$.

On pose : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

$$\begin{aligned} 1) \text{ a) Pour tout } x \in [0; +\infty[; g(x) &= \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt \\ &= -\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \\ &= -k(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); g(x) = -k(\sqrt{x})$.

b) La fonction $u : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $v : t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$; donc la fonction g est continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{c) pour tout } x \in]0; +\infty[\text{ on a : } g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} k'(\sqrt{x}) = -\frac{e^{-\sqrt{x}^2}}{2\sqrt{x}} = -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) < 0$.

Par suite g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$; et comme elle est continue à droite en 0; alors g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

$$2) \text{ a) Montrons que : } (\forall x \in]0; +\infty[); \frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$; g est continue sur $[0; x]$ et dérivable sur $]0; x[$; d'après le théorème des

$$\text{accroissements finis : } (\exists c \in]0; x[); \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(c) = -\frac{e^{-c}}{2\sqrt{c}}$$

$$\text{On a : } 0 < c < x \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{x} \\ -x < -c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ -x < -c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ e^{-x} < e^{-c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} < \frac{e^{-c}}{2\sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow \frac{-e^{-c}}{2\sqrt{c}} < \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in]0; +\infty[); \frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{b) On a : } \begin{cases} (\forall x \in]0; +\infty[); \frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} = -\infty \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty$$

D'où : g n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe de g admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse 0 dirigée vers le bas.