

Exercice 1

Soient x et y deux nombres réels tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$.

Montrer que: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

Indication : (Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a : $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$).

Solution

Sachant que $|x| < 1$ et $|y| < 1$, montrons que : $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On a : ■ $|x| < 1$, donc: $x^2 < 1$, d'où: $1-x^2 > 0$

■ $|y| < 1$, donc: $y^2 < 1$, d'où: $1-y^2 > 0$

D'une part:

Posons: $a = \sqrt{1-x^2}$ et $b = \sqrt{1-y^2}$; On a : $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc :

$$\frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{1-x^2})^2 + (\sqrt{1-y^2})^2}{2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad (1)$$

D'autre part, montrons que : $\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

Pour cela, comparons : $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ et $\frac{x^2+y^2}{2}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &= \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \\ &= \frac{x^2-2xy+y^2}{4} \\ &= \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où le résultat : } \frac{x^2+y^2}{2} &\geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow -\frac{x^2+y^2}{2} \leq -\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow 1-\frac{x^2+y^2}{2} \leq 1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \\ &\Rightarrow 2\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{2}} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) on obtient : $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

On conclut que pour tous réels x et y tels que ; $|x| < 1$ et $|y| < 1$; on a :

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$$