SIMILI EXAMEN NATIONALE N° 2 **2éme Bac PC- SVT**

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{-4+5u_n}{1+u_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. Vérifier que $u_{n+1} - 2 = 3 \times \dfrac{u_n - 2}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = 1 + \dfrac{3}{2-u_n}$; pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$ et en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$. $v_n = -2 - n$.

b. Montrer que : $u_n = \dfrac{3}{1-v_n} + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$; puis écrire u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; on considère les points suivants $A(1;1;-3)$; $B(1;-1;1)$; $C(3:1;-3)$ et la sphère (S) d'équation: $x^2+y^2+z^2+\ 2x-\ 2y-2z-1=0$.

1. a. Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{j}+\vec{k})$. En déduire que : $2y+z+1=0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC).

2. a. Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(-1;1;1)$ et son rayon est $R=2$.

b. Calculer la distance du point Ω au plan (ABC) et en déduire que le plan coupe la sphère (S) selon un cercle (C) dont on déterminera le rayon.

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point Ω et qui est perpendiculaire au plan (ABC)

b. Déterminer les coordonnées du centre du cercle (C).

4. Montrer que la droite (AC) ne coupe pas la sphère (S).

Exercice 3

On considère les nombres complexes Suivants: $a=\sqrt{3}-i$; $b=(2-\sqrt{3})-i$ et $c=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

1. Montrer que a et $2-b$ sont les solutions ce l'équation d'inconnue dans $\mathbb{C}$: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

2. a. Montrer que : $a+b=-\sqrt{2}\ \bar{c}$

b. Montrer que: $\dfrac{a}{c} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}b$.

c. En déduire l'argument du nombre complexe b.

d. Montrer que: $|a|=|c|$ et en déduire que: $a=ce^{i\frac{7\pi}{12}}$.

3. On considère dans le plan complexe muni repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$; les points A ; B et C d'affixes respectives a ; b et c.

a. Calculer $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$.

b. Soit d l'affixe du point D l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{5\pi}{12}$

Montrer que : $d = ae^{i\frac{5\pi}{6}}$

Exercice 4

Une urne contient 8 balles : 6 balles Blanches et 2 balles Noires (Ces balles sont indiscernables au toucher).
1. On tire au hasard successivement et sans remise 2 balles de l'urne.
Soit A l'évènement « les deux balles tirées de l'urne sont Blanches.

Montrer que : $P(A) = \frac{15}{28}$.

2. Soit X la variable aléatoire qui associe tout tirage au nombre des balles blanches restantes dans l'urne après le tirage de cinq balles successivement et sans remise.

a. Montrer que I ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{1;2;3\}$.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

c. Calculer l'espérance et écart type de cette variable aléatoire X.

Problème

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = 9\left(e^x\right)^3 - 8x$.

1. Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. a. Montrer que : $g'(x) = 27\left(e^x - \frac{2}{3}\right)\left(e^{2x} + \frac{2}{3}e^x + \frac{4}{9}\right)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que g est Strictement positif sur $\mathbb{R}$

3. Montrer que: $g\left(\ln\frac{x}{3}\right) = \frac{x^3}{3} - 8\ln\frac{x}{3}$; pour tout x de $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3}{9} - 4\left(\ln\frac{x}{3}\right)^2$.

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que : $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. Montrer que: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter le résultat.

2. a. Montrer que : $f'(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{8}{x} \times \ln\frac{x}{3}$; pour tout x de $]0;+\infty[$

b. En déduire que : $f'(x) = \frac{1}{x} g\left(\ln\frac{x}{3}\right)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

c. Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

3. a. Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif α solution de l'équation $f(x) = 0$.

b. Montrer que $f(1) = \frac{1}{9}\ln\left(\frac{e}{3^6}\right) \times \ln\left(3^6 e\right)$ en déduire que: $f(1) < 0$

c. Montrer que $\alpha\sqrt{\alpha}=6\ln\frac{3}{\alpha}$ et en déduire que : $\alpha<\frac{3}{\sqrt[6]{e}}$.

4. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 3.

   b. Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3. a. En utilisant l'intégration par partie montrer que : $\int_{\alpha}^{3}\left(\ln\frac{x}{3}\right)^{2}dx=6-\left(\frac{1}{36}\alpha^{3}+\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}+2\right)\alpha$

   b. Donner une valeur approchée de la surface (calculée en cm^2) de la partie du plan délimitée par la courbe (C) ; l'axe des ordonnées et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=3$ sachant que $\alpha\simeq 1{,}92$.